CC1
Corrigé

Exercice 1. a. L'adhérence de S, notée $\overline{S}$, est, au choix :
- le plus petit fermé contenant S ;
- $\{x \in E : \forall r > 0, B(x,r) \cap S \neq \varnothing\}$;
- l'ensemble des limites de suites convergentes de E à valeurs dans S.

L'intérieur de S, noté $\overset{\circ}{S}$, est, au choix :
- le plus grand ouvert inclus dans S ;
- $\{x \in A : \exists r > 0, B(x,r) \subset S\}$.

b. $\mathbb{Z}$ est fermé (au choix : son complémentaire, $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[$ est ouvert comme réunion d'ouvert, ou : toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui converge dans $\mathbb{R}$ est stationnaire, donc sa limite est elle aussi dans $\mathbb{Z}$). Donc $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$ ne contient aucune boule ouverte de rayon strictement positif (au choix : $\mathbb{Z}$ est dénombrable alors qu'une telle boule ne l'est pas, ou : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $r > 0$, $k + \min(\frac{1}{2}, \frac{r}{2}) \in B(k,r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$), donc n'a pas de point intérieur : $\overset{\circ}{Z} = \varnothing$.

Exercice 2. a. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
(x,y) \in E &\Leftrightarrow f(x,y) \in F \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 \in]-1,1] \cup [5,10[\\
&\Leftrightarrow -1 < x^2 + y^2 + 1 \leq 1 \text{ ou } 5 \leq x^2 + y^2 + 1 < 10 \\
&\Leftrightarrow -2 < x^2 + y^2 \leq 0 \text{ ou } 4 \leq x^2 + y^2 < 9 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \text{ ou } 2 \leq \|(x,y)\|_2 < 3 \\
&\Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \text{ ou } 2 \leq \|(x,y)\|_2 < 3.
\end{aligned}$$

Ainsi, $E = \{(0,0)\} \cup (B(O,3) \setminus B(O,2))$, où $O = (0,0)$, et les boules sont pour la norme euclidienne.

b. Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$ est fermé pour N si son complémentaire est ouvert pour N, ou encore si toute suite convergente dans $(\mathbb{R}^2, N)$ à valeurs dans S a sa limite dans S.

Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert pour N si :

$$\forall x \in S,\ \exists r > 0, B_N(x,r) \subset S.$$

Un sous -ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$ est borné pour N s'il existe $R > 0$ tel que $S \subset B_N((0,0), R)$.

c. E n'est pas fermé : $((0, 3 - \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à valeurs dans E, qui converge dans R^2 (muni de n'importe quelle norme) vers $(0,3)$ qui n'appartient pas à E.

E n'est pas ouvert : l'origine $O = (0,0)$ appartient à E, mais pour tout $r > 0$, $B(O,r)$ n'est pas inclus dans E, car contient $(\min(1, \frac{r}{2}), 0)$ qui n'appartient pas à E.

E est borné car inclus dans la boule centrée en l'origine et de rayon 3.

Exercice 3. a. $\overline{B}$ est un parallélogramme (bord et intérieur). En effet, si l'on note C (pour carré) la boule unité fermée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} u \in \overline{B} &\Leftrightarrow N_\phi(u) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow N(\phi(u)) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \phi(u) \in C \\ &\Leftrightarrow u \in \phi^{-1}(C), \end{aligned}$$

donc $\overline{B}$ est l'image par l'application linéaire ϕ^{-1} du carré (bord et intérieur) C, donc un parallélogramme. L'application ϕ^{-1} a pour matrice $\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$, et les sommets de C sont les points de coordonnées $(1, \pm 1)$ et leurs symétriques par rapport à l'origine, donc ceux de $\overline{B}$ sont les points : $\frac{1}{ad-bc}(d \mp b, -c \pm a)$ et leurs symétriques.

b. La boule unité de la norme euclidienne n'est pas un parallélogramme, donc $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas linéairement liées.

Exercice 4. Soient $v, w \in E$.

$$\begin{aligned} N(v+w)^2 + N(v-w)^2 &= \langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle \text{ (définition de } N) \\ &= (\langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle) + \big(\langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + (-1)^2\langle w,w\rangle\big) \text{ (bilinéarité)} \\ &= (N(v)^2 + 2\langle v,w\rangle + N(w)^2) + (N(v)^2 - 2\langle v,w\rangle + N(w)^2) \text{ (symétrie et définition de } N) \\ &= 2N(v)^2 + 2N(w)^2. \end{aligned}$$

Plaçons nous dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{OA} = v$, $\overrightarrow{OB} = w$ et $\overrightarrow{OC} = v + w$. Alors $OACB$ est un parallélogramme, et $v - w = \overrightarrow{BA}$. (PAR) se traduit ici par

$$OC^2 + AB^2 = 2(OA^2 + OB^2),$$

i.e. : la somme des carrés des diagonales est égale à deux fois la somme des carrés des côtés.

Exercice 5. a. Pour tout $(v, w) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}$,

— $N_\mathbb{E}(v) \geq 0$ et $N_\mathbb{F}(w) \geq 0$ par positivité de $N_\mathbb{E}$ et $N_\mathbb{F}$, donc $N(v,w) = \max(N_\mathbb{E}(v), N_\mathbb{F}(w)) \geq 0$;

— Si $N(v,w) = 0$, alors $N_\mathbb{E}(v)$ et $N_\mathbb{F}(w) \leq 0$, et en fait $N_\mathbb{E}(v) = N_\mathbb{F}(w) = 0$ par positivité, ce qui entraîne $v = 0_\mathbb{E}$ et $w = 0_\mathbb{F}$ par caractère défini de $N_\mathbb{E}$ et $N_\mathbb{F}$, donc $(v,w) = 0_{\mathbb{E}\times\mathbb{F}}$;

— pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N(\lambda(v,w)) &= N(\lambda v, \lambda w) \\ &= \max(N_\mathbb{E}(\lambda v), N_\mathbb{F}(\lambda w)) \\ &= \max(|\lambda| N_\mathbb{E}(v), |\lambda| N_\mathbb{F}(w)) \text{ par homogénéité de } N_\mathbb{E} \text{ et } N_\mathbb{F} \\ &= |\lambda| \max(N_\mathbb{E}(v), N_\mathbb{F}(w)) \\ &= |\lambda| N(v,w), \end{aligned}$$

donc N est homogène ;

— Pour tout $(v', w') \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}$, par inégalité triangulaire sur $N_{\mathbb{E}}$ et $N_{\mathbb{F}}$,

$$N_{\mathbb{E}}(v+v') \leq N_{\mathbb{E}}(v) + N_{\mathbb{E}}(v') \quad \text{et} \quad N_{\mathbb{F}}(w+w') \leq N_{\mathbb{F}}(w) + N_{\mathbb{F}}(w')$$

donc

$$\begin{aligned} N((v,w)+(v',w')) &= N(v+v', w+w') \\ &= \max(N_{\mathbb{E}}(v+v'), N_{\mathbb{F}}(w+w')) \\ &\leq \max(N_{\mathbb{E}}(v)+N_{\mathbb{E}}(v'), N_{\mathbb{F}}(w)+N_{\mathbb{F}}(w')). \end{aligned}$$

Or $N_{\mathbb{E}}(v) \leq N(v,w)$ et $N_{\mathbb{E}}(v') \leq N(v',w')$ donc $N_{\mathbb{E}}(v)+N_{\mathbb{E}}(v') \leq N(v,w)+N(v',w')$, et de même $N_{\mathbb{F}}(w)+N_{\mathbb{F}}(w') \leq N(v,w)+N(v',w')$, donc finalement

$$N((v,w)+(v',w')) \leq N(v,w)+N(v',w')$$

donc N satisfait l'inégalité triangulaire (on pouvait invoquer le fait général :

$$\max(a+a', b+b') \leq \max(a,b) + \max(a',b')$$

mais en le disant clairement, car dans le groupe 1 au moins, le même genre d'affirmation a été invoqué à tort en remplaçant max par min dans un devoir antérieur...).

Ainsi, N est bien une norme sur $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$.

b. Notons $A = S \times T$ et $\mathbb{G} = \mathbb{E} \times \mathbb{F}$. Alors $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$. D'après le cours (sinon le redémontrer), $\overline{A} = \overline{S} \times \overline{T}$ et $\mathring{A} = \mathring{S} \times \mathring{T}$, donc

$$\begin{aligned} \partial A &= \left(\overline{S} \times \overline{T}\right) \setminus \left(\mathring{S} \times \mathring{T}\right) \\ &= \left((\overline{S} \setminus \mathring{S}) \times \overline{T}\right) \cup \left(\overline{S} \times (\overline{T} \setminus \mathring{T})\right) \\ &= \left(\partial S \times \overline{T}\right) \cup \left(\overline{S} \times \partial T\right). \end{aligned}$$