Feuille 4

Corrigé partiel

Exercice 5. 1. Étant donné $k \in \mathbb{R}$, "f est k-lipschitzienne pour N_1" signifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |f(x) - f(y)| \leq k\ N_1(x-y).$$

Supposons que f est k-lipschitzienne pour N_1. Par équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$, il existe $C > 0$ tel que $N_1 \leq CN_2$. Mais alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |f(x) - f(y)| \leq k\ N_1(x-y) \leq kC\ N_2(x-y),$$

donc f est k'-lipschitzienne pour N_2 avec $k' = kC$.

2. "f est uniformément continue pour N_1" signifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ N_1(x-y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Supposons que f est uniformément continue pour N_1. Par équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$, il existe $C > 0$ tel que $N_1 \leq CN_2$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et soit δ comme ci-dessus. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, si $N_2(x-y) \leq \delta/C =: \delta'$, alors $N_1(x-y) \leq CN_2(x-y) \leq C\delta/C = \delta$ et donc, par choix de δ, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta' > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ N_2(x-y) \leq \delta' \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie que f est uniformément continue pour N_2.

Exercice 6. Soient $x, y \in [0,2]$. Si x et y appartiennent tous les deux à $[0,1]$ ou tous les deux à $[1,2]$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$ par caractère K-lipschitzien de f sur chacun de ces segments. Supposons maintenant qu'ils appartiennent chacun à l'un des segments. Quitte à inverser leurs rôles (ce qui ne change pas le résultat grâce aux valeurs absolues), on peut supposer que $x \in [1,2]$ et $y \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(1) + f(1) - f(y)| \\
&\leq |f(x) - f(1)| + |f(1) - f(y)| \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\leq K|x-1| + K|1-y| \text{ par } K\text{-lipschitzianité sur } [1,2] \text{ et } [0,1] \text{ resp.} \\
&= K(x-1) + K(1-y) \text{ puisque } x \geq 1 \text{ et } y \leq 1 \text{ par hypothèse} \\
&= K(x-y) = K|x-y|.
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que f est K-lipschitzienne sur $[0,2]$.

Exercice 7. f est continue donc uniformément continue sur le *segment* $[-T, 2T]$ par le théorème de Heine. Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in [-T, 2T],\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, soit δ comme ci-dessus, et soient maintenant $x, y \in \mathbb{R}$. Posons $\delta' = \min(\delta, T)$ et supposons que $|x-y| \leq \delta'$. Il existe (un unique) $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq y+kT < T$, et alors comme $y - T \leq x \leq y + T$, on a $-T \leq x < 2T$. Ainsi, $x' = x + kT$ et $y' = y + kT$ appartiennent à $[-T, 2T]$. Comme en outre $|x' - y'| = |x - y| \leq \delta$, par choix de δ, $|f(x') - f(y')| \leq \varepsilon$, et donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ par T-périodicité de f. On a ainsi montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta' > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \delta' \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

i.e. que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.