CC2 – Corrigé

Question de cours. La dérivée directionnelle de f en a selon $\vec{u}$ est

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(a+t\vec{u}), \quad i.e. \quad \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t}$$

lorsque cette limite existe.

Exercice 0. 1. Soit f une fonction lipschitzienne. Il existe alors $k\in\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2, \quad \|f(x)-f(y)\|\le k\|x-y\|'$$

pour n'importe quelles normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement (toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie étant équivalentes, le fait pour une telle application d'être lipschitzienne ne dépend pas des normes choisies). Soit maintenant $\varepsilon>0$. Posons $\eta=\varepsilon/k>0$. Pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2$,

$$\|x-y\|'\le\eta \implies \|f(x)-f(y)\|\le k\times\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon,$$

donc f est uniformément continue.

2. La réciproque est fausse. Considérons l'application $\sqrt{\cdot}$ sur le segment $[0,1]$. Elle est continue sur ce segment donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. En revanche elle n'est pas lipschitzienne. En effet, supposons qu'il existe $k\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le k|x-y|$ pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$. Alors en particulier, en prenant $y=0$, on a $\sqrt{x}\le kx$ pour tout $x\in[0,1]$, et donc $\frac{1}{\sqrt{x}}\le k$ pour tout $x\in]0,1]$, ce qui est impossible car $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$. Cette fonction est donc uniformément continue mais pas lipschitzienne.

Exercice 1. 1.a. Pour tout $(x,y)\in U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $x^2+2y^2>0$, donc f est bien définie, et c'est une fonction rationnelle sur l'ouvert U, donc elle est continue (et même C^∞) sur U.

1.b. Pour tout $(x,y)\in U$,

$$|f(x,y)|=\left|\frac{x^4-y^4}{x^2+2y^2}\right|\le\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\le\frac{2\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2}\le 2\|(x,y)\|^2$$

(pour la deuxième inégalité : pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $0\le x^2\le x^2+y^2=\|(x,y)\|^2$ donc $0\le x^4\le\|(x,y)\|^2$, et de même pour y^4), donc $f(x,y)$ tend vers $0=f(0,0)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$. En effet, étant donné $\varepsilon>0$, on pose $\eta=\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ et on a pour tout $(x,y)\in U$,

$$\|(x,y)\|<\eta \implies 2\|(x,y)\|^2<2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \implies |f(x,y)|<\varepsilon.$$

f est donc continue en $(0,0)$.

2. Pour tout $(x,y)\in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{4x^3(x^2+2y^2)-2x(x^4-y^4)}{(x^2+2y^2)^2}=\frac{2x^5+8x^3y^2+2xy^4}{(x^2+2y^2)^2}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-4y^3(x^2+2y^2) - 4y(x^4-y^4)}{(x^2+2y^2)^2} = -4\frac{y^3x^2+y^5+x^4y}{(x^2+2y^2)^2}.$$

3. Pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{x^2-0}{x} = x \to_{x\to 0} 0$$

donc f admet une dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ qui vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, pour tout $y \neq 0$,

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{-\frac{y^2}{2}-0}{y} = -\frac{y}{2} \to_{y\to 0} 0$$

donc f admet une dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$ qui vaut $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

4. Il s'agit d'étudier la continuité des fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}^2$ par $g(0,0) = h(0,0) = 0$ et pour tout $(x,y) \in U$, $g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^5+8x^3y^2+2xy^4}{(x^2+2y^2)^2}$ et $h(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4\frac{y^3x^2+y^5+x^4y}{(x^2+2y^2)^2}$. On procède *exactement* comme dans la question 1.b. D'une part, ces fonctions sont rationnelles donc continues sur U, puis on vérifie que pour tout $(x,y) \in U$, $|g(x,y)| \leq 12\|(x,y)\|$ et $|h(x,y)| \leq 12\|(x,y)\|$ et on conclut de la même manière qu'en 1.b. que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.

5. f admet des dérivée partielles qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$ tout entier donc d'après le théorème du cours, f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. 1.a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $N_\lambda = f^{-1}(\{\lambda\})$ est l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ (singleton) par une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donc est un fermé de $\mathbb{R}^2$. De plus, par hypothèse de coercivité, il existe $R > 0$ tel que $\|(x,y)\| > R \implies f(x) > \lambda$, donc $N_\lambda \subset \bar{B}((0,0),R)$. N_λ est donc fermé et borné dans un EVN de dimension finie, donc N_λ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

1.b. L'argument est identique : $S_\lambda = f^{-1}(]-\infty,\lambda])$ est l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ (cf. cours) par une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donc est un fermé de $\mathbb{R}^2$, et il est borné pour la même raison que N_λ, donc il est compact.

1.c. Soit $\lambda \in f(\mathbb{R}^2)$. Alors S_λ est un compact non vide sur lequel f est continue, donc f y admet un minimum : il existe $z_0 \in S_\lambda$ tel que $f(z) \geq f(z_0)$ pour tout $z \in S_\lambda$. Comme $z_0 \in S_\lambda$, $f(z_0) \leq \lambda$. En outre, pour tout $z \in \mathbb{R}^2 \setminus S_\lambda$, $f(z) > \lambda \leq f(z_0)$. Donc f admet en z_0 un minimum global (en particulier f est minorée par $f(z_0)$).

2.a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \neq 0$, pour tout $(x,y) \in N_\lambda$, $xy = \lambda \neq 0$ donc $x \neq 0$. Ainsi,

$$N_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = \lambda\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \lambda \times \frac{1}{x}\}$$

est le graphe de la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\lambda}{x}$, donc une hyperbole. Pour $\lambda > 0$, N_λ a une branche dans le quadrant en haut à droite et en bas à gauche, et pour $\lambda < 0$ N_λ a une branche dans le quadrant en haut à gauche et une dans le quadrant en bas à droite. Enfin, pour $\lambda = 0$,

$$N_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} = (Ox) \cup (Oy).$$

Insérer image

2.b. Ces ensembles sont fermés car images réciproques de fermés de $\mathbb{R}$ par l'application $(x,y) \mapsto xy$ continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (car polynomiale). Ils ne sont en revanche pas compacts car pas bornés (quel que soit λ, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = ((n, \frac{\lambda}{n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans N_λ et satisfait $\|z_n\| \geq n \to +\infty$ $[n \to +\infty]$.

2.c. Les questions 1.a. et 2.b. montrent que la fonction g n'est pas coercive.

Exercice 3. Notons U_{++}, U_{-+}, U_{--} et U_{+-} les quatre quadrants ouverts du plan $\{(x,y), x > 0 \text{ et } y > 0\}$, $\{(x,y), x < 0 \text{ et } y > 0\}$, $\{(x,y), x < 0 \text{ et } y < 0\}$, et $\{(x,y), x > 0 \text{ et } y < 0\}$, sur lesquels $f(x,y) = x+y$, $-x+y$, $-x-y$ et $x-y$ respectivement. f coincide avec une application linéaire sur chacun de ces ouverts donc est différentiable en chacun de leurs points, et la différentielle en un point coïncide avec la fonction en ce point.

Étudions les autres points. En $(0, y_0)$, avec $y_0 \neq 0$: $x \mapsto |x| + |y_0|$ n'a pas de dérivée en 0 donc f n'a pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0, y_0)$ (donc n'est pas différentiable en ce point). En revanche, $y \mapsto |y|$ est linéaire au voisinage de $y_0 \neq 0$ (égale à y ou $-y$ selon le signe de y_0), donc dérivable en y_0, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0)$ est définie et vaut ± 1. De la même façon, en $(x_0, 0)$ avec $x_0 \neq 0$, f admet une dérivée partielle par rapport à x, mais pas par rapport à y. Enfin, en $(0,0)$, f n'admet pas de dérivées partielles.

Finalement, f est différentiable exactement sur $\mathbb{R}^2$ privé des axes de coordonnées, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe des y et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe des x.