Licence de mathématiques (2017-2018)
Examen "Topologie" (MAT303)
JANVIER 2018
Durée : 2h
Sans calculatrice, ni document.
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1. *(Questions de cours)[5 points]*
1) On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme N.
1a) Donner la définition de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue en $x \in \mathbb{R}^n$.
1b) Dans le cas où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est LINEAIRE, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si f est continue en 0.
1c) Donner la définition de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.
1d) La fonction $f(x) = \sin(x)$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

2) On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme N.
2a) Donner la définition d'une boule ouverte $B(a, R)$ où $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$ puis d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de N.
2b) Montrer qu'une boule ouverte $B(a, R)$ $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de N.

Exercice 2 (4 points)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x|y|$.*
1) Etudier la continuité de f.
2) Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ esiste et est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3) Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe et est continiue sauf si $y = 0$.
4) La fonction f est-elle différentiable pour (x_0, y_0) avec $y_0 \neq 0$? Si oui, donner la différentielle de f en (x_0, y_0).

Exercice 3 (2 points)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, ye^x, xy^3)$. Donner la matrice jacobienne de f en tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

Exercice 4 (4 points)**.** *Soit $f ; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2(x - y)^2 - x^4 - y^4$.*
1) Montrer que les points critiques de f sont $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
2) La fonction f a-t-elle des extremas locaux ?
3) La fonction f a-t-elle des extremas globaux ?

Exercice 5 (5 points)**.** *On dit qu'une famille $\mathcal{T}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ est une topolgie si elle vérifie :*

(T1) *$\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont dans $\mathcal{T}$.*

(T2) *Toute réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.*

(T3) *Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.*

1) Montrer que les $\mathcal{T}$ suivants donnent des exemples de topologie sur $\mathbb{R}^n$:
1a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$.
1b) $\mathcal{T}$ est la famille de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.
1c) $\mathcal{T}$ est l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme N.

2) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une topologie $\mathcal{T}$. Comment définir la notion de "f continue par rapport à la topologie $\mathcal{T}$" ? On pourra s'inspirer de l'exemple 1c).
Question subsidiaire : Si $\mathcal{T}$ est la topologie donnée par l'exemple de 1b), quelles sont les applications continues $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pour cette topologie ?