Contrôle continu 1, éléments de correction

Exercice 1. *Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction vers laquelle la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, puis étudier la convergence uniforme de cette suite sur $\mathbb{R}_+$. Si la convergence uniforme n'a pas lieu sur $\mathbb{R}_+$, l'étudier sur l'intervalle I spécifié.*

1) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$; *$I = [0, A]$, avec $A > 0$ quelconque.*

Pour tout $x \geq 0$, $\quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} ne^{-x}/n = e^{-x}$, donc $(f_n)_{n\geq 1}$ CVS sur $\mathbb{R}_+$ vers $f = 1/\exp$.

Pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \geq 0$, $\quad f_n(x) - f(x) = \dfrac{x^2 - xe^{-x}}{n+x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\|f - f_n\|_\infty = \infty$, et il n'y a pas CVU de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers f sur $\mathbb{R}_+$.
Par contre, lorsque $A > 0$, la fonction continue $x \mapsto x^2 - xe^{-x}$ est bornée sur $[0, A]$, donc $\sup_{x\in[0,A]}(|f - f_n|(x)) \leq (\sup_{x\in[0,A]}(|x^2 - xe^{-x}|))/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et on a $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{CVU}}{\longrightarrow}} f$ sur $[0, A]$.

2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$; *$I = [a, +\infty[$, avec $a > 0$ quelconque.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(0) = 0$, et si $x > 0$, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $(f_n)_{n\geq 1}$ CVS sur $\mathbb{R}_+$ vers $f = \mathbf{1}_{]0,\infty[}$. Cette fonction limite n'étant pas continue en 0, alors que les f_n le sont, il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}_+$. Mais pour tout $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \geq a$, $\quad |f_n(x) - f(x)| = (1 + nx)^{-1} \leq (1 + na)^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il y a CVU de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers f sur $[a, +\infty[$.

3) $f_n(x) = x\sin(nx)e^{-nx}$.
Pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \geq 0$, $\quad |f_n(x)| \leq xe^{-nx} \leq \sup_{y\geq 0}(ye^{-ny}) = 1/(ne) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il y a CVU de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2. *Pour chacune des séries de fonctions suivantes, déterminer sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ elle converge simplement, puis étudier sa convergence uniforme et sa convergence normale sur l'intervalle I spécifié.*

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1+x^n}$; *$I = [0, a]$, pour un $a \in]0, 1[$ quelconque.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
- si $x \in [0, 1[$, $0 \leq u_n(x) = x^n(1 + x^n)^{-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} x^n$; la série géométrique $\sum_{n\geq 1} x^n$ converge ;
- $u_n(1) = 1/2$;
- si $x > 1$, $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, $\sum_{n\geq 1} u_n$ CVS sur $[0, 1[$ (elle diverge grossièrement sur $[1, +\infty[$).
Lorsque $a \in]0, 1[$ et $x \in [0, a]$, $0 \leq u_n(x) \leq a^n$. Comme la série $\sum_{n\geq 1} a^n$ converge, on en déduit que $\sum_{n\geq 1} u_n$ CVN (et donc CVU) sur $[0, a]$.

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{x}}$; $I = \mathbb{R}_+$. On pose $v_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+\sqrt{x}}$.
Pour tout $x \geq 0$, la suite $((n + \sqrt{x})^{-1})_{n\geq 1}$ est décroissante. Par le théorème des séries alternées, on obtient que $\sum_{n\geq 1} v_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+$. On a aussi la majoration du reste : si $N \in \mathbb{N}^\star$ et $x \geq 0$, alors $\displaystyle\left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{N+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sum_{n\geq 1} v_n$ CVU sur $\mathbb{R}_+$.

Par contre, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\sup_{x\geq 0}(|(-1)^n(n+\sqrt{x})^{-1}|) = 1/n$ (car la fonction $x \mapsto (n+\sqrt{x})^{-1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$) ; comme la série $\sum_{n\geq 1} n^{-1}$ diverge, on n'a pas CVN de $\sum_{n\geq 1} v_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. *Pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2+n^6x}$.*

1) *Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, et que sa somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ définit une fonction S continue sur $\mathbb{R}_+$.*

Pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq u_n(x) \leq 1/n^2$, donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ CVU sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, elle CVS, et comme chaque u_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, la convergence uniforme implique que la somme S est elle aussi continue.

2) *On étudie à présent la dérivabilité de S sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $a > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} u_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$. En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Pour cela, énoncer précisément le théorème utilisé et vérifier que ses hypothèses sont satisfaites.*

On utilise le théorème suivant : si $\sum_{n\geq 1} v_n$ est une série de fonctions dérivables sur un intervalle I (en parlant de dérivabilité d'un seul côté aux extrémités de l'intervalle, si elles appartiennent à celui-ci) qui CVS sur I, et telle que la série $\sum_{n\geq 1} v_n'$ des dérivées CVU sur I, alors la somme S de la série est une fonction dérivable sur I (et pour tout $x \in I$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(x)$).

Ici, $u_n'(x) = -\dfrac{n^2}{(1+n^4x)^2}$, et pour tout $a > 0$, si $x \geq a$, on a $|u_n'(x)| \leq \dfrac{n^2}{(1+n^4a)^2} \leq \dfrac{1}{n^6a^2}$. Les hypothèses du théorème sont donc satisfaites sur $I = [a,+\infty[$, si bien que S est dérivable sur $[a,+\infty[$; $a > 0$ étant quelconque, S est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

3) *Pour étudier la dérivabilité de S en 0, on forme le taux d'accroissement*

$$T(x) = \frac{1}{x}(S(x)-S(0)), \quad \textit{pour } x > 0.$$

a) *Montrer que $T(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^4x}$ pour tout $x > 0$.* C'est un calcul direct.

b) *Ce taux d'accroissement a-t-il une limite lorsque x tend vers 0 ?*

Chaque terme $\dfrac{n^2}{1+n^4x}$ étant une fonction décroissante de $x > 0$, $-T$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, et quand x tend vers 0, $-T(x)$ tend vers $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}_+^\star}(-T(x))$. De plus, on peut intervertir les “sup” :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+^\star}(-T(x)) = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^\star}\sup_{M\in\mathbb{N}^\star}\sum_{n=1}^{M}\frac{n^2}{1+n^4x} = \sup_{M\in\mathbb{N}^\star}\sup_{x\in\mathbb{R}_+^\star}\sum_{n=1}^{M}\frac{n^2}{1+n^4x}.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$, le terme dans la somme atteint un maximum pour $x = 0$, égal à n^2, donc on calcule ici $\displaystyle\sup_{M\in\mathbb{N}^\star}\sum_{n=1}^{M} n^2 = +\infty$: quand x tend vers 0, $T(x)$ tend vers $-\infty$.

Remarques : on pourrait utiliser une comparaison série-intégrale, mais ce n'est pas immédiat, car à $x > 0$ fixé, $y \mapsto y^2/(1+y^4x)$ est croissante sur $[0, 1/x^{1/4}]$, décroissante sur $[1/x^{1/4}, +\infty[$.