Université Grenoble Alpes | Licence Sciences et Technologies
MAT402 | 2016-2017

Contrôle continu 1

7 mars 2017 ; durée : 2 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Barème approximatif : exercice 1 sur 8 points ; exercice 2 sur 6 points ; exercice 3 sur 6 points.

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction vers laquelle la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, puis étudier la convergence uniforme de cette suite sur $\mathbb{R}_+$. Si la convergence uniforme n'a pas lieu sur $\mathbb{R}_+$, l'étudier sur l'intervalle I spécifié.

1) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$; $I = [0, A]$, avec $A > 0$ quelconque ;

2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$; $I = [a, +\infty[$, avec $a > 0$ quelconque ;

3) $f_n(x) = x\sin(nx)e^{-nx}$.

Exercice 2. Pour chacune des séries de fonctions suivantes, déterminer sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ elle converge simplement, puis étudier sa convergence uniforme et sa convergence normale sur l'intervalle I spécifié.

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1+x^n}$; $I = [0, a]$, pour un $a \in]0, 1[$ quelconque ;

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{x}}$; $I = \mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + n^6 x}$.

1) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, et que sa somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ définit une fonction S continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) On étudie à présent la dérivabilité de S sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $a > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} u_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Pour cela, énoncer précisément le théorème utilisé et vérifier que ses hypothèses sont satisfaites.

3) Pour étudier la dérivabilité de S en 0, on forme le taux d'accroissement

$$T(x) = \frac{1}{x}(S(x) - S(0)), \quad \text{pour } x > 0.$$

a) Montrer que $T(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^4 x}$ pour tout $x > 0$.

b) Ce taux d'accroissement a-t-il une limite lorsque x tend vers 0 ?

Université Grenoble Alpes — Licence Sciences et Technologies
MAT402 — 2016-2017

Class Test 1

7/3/2017; duration: 2 hours

All documents, calculators and cellphones are forbidden.
The clarity of writing and explanations will be taken into account.
Marking scheme: exercise 1: 8 points; exercise 2: 6 points; exercise 3: 6 points.

Exercise 1. In each of the following cases, determine the pointwise limit of the sequence of functions $(f_n)_{n\geq 1}$ on $\mathbb{R}_+$, then study uniform convergence on $\mathbb{R}_+$. Whenever convergence isn't uniform on $\mathbb{R}_+$, study it on the specified interval I.

1) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$; $I = [0, A]$, with $A > 0$;

2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$; $I = [a, +\infty[$, with $a > 0$;

3) $f_n(x) = x\sin(nx)e^{-nx}$.

Exercise 2. For each of the following series of functions, determine on which subset of $\mathbb{R}_+$ it converges pointwise. Then study uniform and normal convergence on the specified interval I.

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1+x^n}$; $I = [0, a]$, for any $a \in]0, 1[$;

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{x}}$; $I = \mathbb{R}_+$.

Exercise 3. For all $n \in \mathbb{N}^\star$ and $x \in \mathbb{R}_+$, we set $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2+n^6x}$.

1) Prove that the series of functions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} u_n$ converges pointwise on $\mathbb{R}_+$, and that its sum $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ defines a continuous function S on $\mathbb{R}_+$.

2) We now study differentiability of S on $\mathbb{R}_+$. Prove that for all $a > 0$, the series $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} u_n'$ converges normally on $[a, +\infty[$. Deduce that S is differentiable on $\mathbb{R}_+^\star$. To this end, state precisely the theorem you are using, and check that its hypotheses are satisfied.

3) To study differentiablity of S at the point 0, we consider the growth rate

$$T(x) = \frac{1}{x}(S(x) - S(0)) \quad \text{for } x > 0.$$

a) Prove that $T(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^4x}$ for all $x > 0$.

b) Does $T(x)$ have a limit when x tends to 0 ?