Feuille d'exercices 1 : révisions, mise en jambe

Autour de la borne supérieure

Comme dans le cours, si f est une fonction d'un ensemble A dans $\mathbb{R}$, on note $\sup_A f$ la borne supérieure de $f(A) = \{f(x),\, x \in A\}$, et $\inf_A f$ sa borne supérieure.

Exercice 1. En fonction du paramètre $n \in \mathbb{N}^*$, donner la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble $D_n = \left\{\dfrac{x^2 - n^2}{x^2 + n^2},\, x \in \mathbb{R}_+\right\}$, si elles existent. Cet ensemble admet-il un plus grand élément, un plus petit élément ?

Exercice 2. Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup_{\mathbb{R}}(f+g) \leqslant \sup_{\mathbb{R}} f + \sup_{\mathbb{R}} g$.

Exercice 3. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < \sqrt{2}\}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante.
Déterminer $\sup_A f$.

Exercice 4. Soit $B = \mathbb{Q} \cap]0,1[$. On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $g(x) = x - x^3$.
Déterminer $\sup_B g$ et $\inf_B g$.

Exercice 5. Soit $(u_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une suite numérique dépendant de deux paramètres.
Montrer que $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}}\big(\sup\limits_{j\in\mathbb{N}}(u_{i,j})\big) = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\big(\sup\limits_{i\in\mathbb{N}}(u_{i,j})\big)$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique bornée.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \{u_k, k \geqslant n\}$, et $s_n = \sup X_n$.

1. Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
2. Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note sa limite $\limsup u_n$.
3. Définir par analogie la limite inférieure $\liminf u_n$.
4. Montrer que, si u_n converge vers ℓ, alors $\liminf u_n = \limsup u_n = \ell$.
5. Montrer que si $\liminf u_n = \limsup u_n$, alors u_n converge vers leur valeur commune.
6. Déterminer $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ pour la suite $u_n = \cos(2\pi n/3)$.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels. On pose $L = \limsup u_n$.

1. Soit une suite a_n convergeant vers a. Déterminer $\limsup(a_n + u_n)$ en fonction de a et de L.
2. Si a_n est seulement bornée, a-t-on $\limsup(a_n + u_n) = \limsup a_n + \limsup u_n$?
3. Déterminer $\limsup e^{u_n}$ en fonction de L.

Exercice 8. Soit une application f de $[0,1]$ dans $[0,1]$, croissante. On se propose de montrer qu'il existe un point fixe de f, c'est-à-dire un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. (Note : f n'est pas supposée continue. Un exercice classique est que le résultat est vrai si on remplace le mot "croissante" par le mot "continue" dans l'hypothèse.)

Pour démontrer le résultat, on considère l'ensemble A des $x \in [0,1]$ tels que $f(x) \leqslant x$.

a) Montrer que l'ensemble A n'est pas vide et qu'il a une borne inférieure, qu'on notera α, avec $\alpha \in [0,1]$.
La suite de l'exercice consiste à montrer que α est un point fixe de f.

b) Exploiter la croissance de f pour démontrer :

i) Si $x \in [0,1]$ est un minorant de A, alors $f(x)$ est aussi un minorant de A.

ii) Si $x \in [0,1]$ est un élément de A, alors $f(x)$ est aussi un élément de A.

c) En appliquant le résultat i) précédent au cas $x = \alpha$, montrer que $f(\alpha) \leqslant \alpha$, autrement dit, que $\alpha \in A$.
En appliquant alors le ii) précédent au cas $x = \alpha$, montrer que $f(\alpha) \geqslant \alpha$, et conclure.

Sur les suites et les séries

Exercice 9. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et le justifier :

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 si et seulement si la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. Si la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite l, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l ou $-l$.
3. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite l, alors la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $|l|$.

Exercice 10. Déterminer (éventuellement, en fonction du paramètre $x \in \mathbb{R}$ ou $z \in \mathbb{C}$) la nature de chacune des séries de terme général u_n défini par :

1) $u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$ 2) $u_n = \dfrac{4^n}{n!}$ 3) $u_n = \dfrac{n^n}{3^{1+2n}}$ 4) $u_n = e^{-n^3-n}$

5) $u_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 6) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e$ 7) $u_n = (-1)^n \sin\dfrac{1}{n}$ 8) $u_n = \dfrac{2^n}{(n+2)3^{n+1}}$

9) $u_n = \dfrac{x^2}{x^2+n}$ 10) $u_n = \dfrac{x^2}{x^2+n^2}$ 11) $u_n = e^{-nx}$ 12) $u_n = z^n$

Exercice 11. (Cesaro) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On veut montrer que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, vers une limite l, alors la suite des moyennes arithmétiques $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$b_n = \dfrac{1}{n}(a_1 + ... + a_n)$ converge également, vers la même limite l.

1. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$, que peut-on dire de la suite $(\dfrac{1}{n}(a_1 + ... + a_{n_0}))_{n\in\mathbb{N}^*}$?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $b_n - l$ en fonction des $a_i - l$, avec $i = 1, ..., n$.
3. Soit $\epsilon > 0$ et des réels x_1,..., x_k tels que $x_1, ..., x_k \in]-\epsilon, +\epsilon[$. Montrer pour tout entier $m \geqslant k$, on a $\dfrac{1}{m}(x_1 + ... + x_k) \in]-\epsilon, +\epsilon[$.
4. Montrer que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie l, alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l.
5. La réciproque est-elle vraie ?
6. Que peut-on dire si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$?

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans l'ensemble $D = \{0, 1, \dots, 9\}$.
1. Montrer que la série de terme général $u_n \cdot 10^{-n}$ converge vers un réel $x \in [0, 10]$.
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle constante à partir d'un certain rang.
3. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 9, alors il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers 0 telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n 10^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n 10^{-n}$.
4. Pour tout $x \in [0, 10[$, montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergeant pas vers 9 telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n 10^{-n} = x$.

Exercice 13. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\in A} \frac{1}{n}$ où A est l'ensemble des entiers ne contenant pas le chiffre 2 dans leur écriture en base 10. En évaluant pour tout entier n le nombre de termes dans $A \cap [10^n, 10^{n+1}[$, étudier la nature de cette série.

Exercice 14. Soit $a > 0$ fixé. On définit la suite de réels $(P_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$P_0(a) = 1, \quad \text{et} \quad P_{n+1}(a) = (n+a)P_n(a) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Il s'agit de montrer que

$$L(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n(a)}{n!\, n^{a-1}}$$

existe et est un nombre strictement positif. Pour cela, on considère la série de terme général u_n, avec

$$u_n = \ln(n+a) - a\ln(n+1) + (a-1)\ln n.$$

1. Comparer la somme partielle d'ordre $n-1$ de $\sum u_n$ avec $\ln \dfrac{P_n(a)}{n!\, n^{a-1}}$.
2. A l'aide d'un développement limité en $1/n$ d'ordre convenable, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.
3. Conclure.