

Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$, $(g_n)_{n \geq 1}$, $(h_n)_{n \geq 1}$ et $(k_n)_{n \geq 1}$ suivantes définies sur les intervalles I spécifiés. Trouver des intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme.

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \text{ sur } \mathbb{R}_+, \quad g_n(x) = xne^{-xn} \text{ sur } \mathbb{R}_+, \quad h_n(x) = (\sin x)^n \text{ sur } \mathbb{R};$$

la fonction $k_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, définie pour tout $n \geq 1$ par $k_n(x) = 0$ si $x \leq -1/n$, $k_n(x) = 1$ si $x \geq 1/n$, avec k_n affine sur l'intervalle $[-1/n, 1/n]$.

Exercice 2. Montrer que les suites de fonctions $(c_n)_{n \geq 0}$ et $(s_n)_{n \geq 0}$, avec $c_n(x) = \cos(nx)$ et $s_n(x) = \sin(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ne convergent pas simplement sur $\mathbb{R}$ (indication : utiliser les formules $\cos(a+b) = \dots$ et $\sin(a-b) = \dots$).

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n(x) = 0$ si $|x - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{n}$, $f_n(\frac{1}{2}) = 1$, et on prolonge f_n de manière affine sur $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$, de sorte qu'elle soit continue.

1. Tracer le graphe de f_n et donner une formule pour $f_n(x)$ en fonction de x .
2. Étudier la convergence de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[0, 1]$, puis la convergence de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)_{n \geq 1}$.
3. Même question lorsque les fonctions f_n sont définies sur $[0, 1]$ par :
 - a) $f_n(x) = 0$ si $x \in [0, \frac{1}{n}[$, $f_n(x) = \frac{1}{x}$ si $x \in [\frac{1}{n}, 1]$.
 - b) $f_n(x) = n$ si $x \in]0, \frac{1}{n}]$, $f_n(x) = 0$ si $x \in \{0\} \cup]\frac{1}{n}, 1]$.

Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$.

1. Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(f'_n)_{n \geq 1}$ des dérivées. Que peut-on constater ?

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f'_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Lemme de Pólya

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ et convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f .

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de points de $[a, b]$ convergeant vers l .

Montrer que la suite $(f_n(x_n))_{n \geq 0}$ tend vers $f(l)$.

Peut-on supprimer l'hypothèse de convergence uniforme ?

Exercice 7. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

Étudier la convergence simple de cette suite.

Montrer de plusieurs façons qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout ensemble du type $I_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ où $a > 0$.

Exercice 8. Trouver une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

- (i) pour tout entier n , l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$ converge ;
- (ii) la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f ;
- (iii) l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge ;
- (iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$ ne tende pas vers $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9. Escalier du diable ou de Cantor

On définit la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par récurrence : $f_0(x) = x$ pour tout

$$x \in [0, 1] \text{ et, pour } n \geq 0, f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f_n(3x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x - 2) & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

- 1. Tracer sur un même graphique les graphes de f_0, f_1, f_2 .
- 2. Montrer que chaque f_n est continue et croissante.
- 3. On considère la série de fonctions de terme général $u_n = f_n - f_{n-1}$ ($n > 0$). Montrer que $\sum u_n$ converge normalement.
- 4. En déduire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f continue et croissante.

Exercice 10. Soient $a \in]0, 1[$ et $b > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$u_n(x) = a^n \sin(b^n x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

- 1. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge normalement. On note f sa somme.
- 2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 3. Montrer que si $ab < 1$, f est de classe C^1 .
- 4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = af(bx) + \sin(x)$.
- 5. On suppose que $ab = 1$ et que b est un entier ≥ 2 . Montrer que f n'est dérivable en aucun point de la forme

$$x = 2kb^n\pi, (k, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

On commencera par le cas $x = 0$ et on montrera que f est 2π -périodique. Que dire de cette famille de points (considérer par exemple le cas $b = 10$) ?

Exercice 11. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \sin(x^n(1 - x))$.

- 1) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3) Qu'en déduit-on pour la suite numérique $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$?
- 4) Est-ce que la suite des dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement ?
- 5) Est-ce que cette suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$?

Exercice 12.

On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \arctan(x/n)$.

- 1) Montrer que la suite des dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
- 2) Sur quels domaines la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément ?