

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

## Problème n° 1

**Notations.** Pour  $m$  et  $n$  deux entiers naturels tels que  $m \leq n$ ,  $\llbracket m, n \rrbracket$  désigne l'ensemble des entiers  $k$  tels que  $m \leq k \leq n$ .

Voici un problème proposé aux élèves d'une classe de première :

Aline et Bertrand commandent chacun un café et une carafe de lait. Aline ajoute immédiatement le lait dans son café puis attend trois minutes que le mélange refroidisse avant de le boire. Bertrand attend trois minutes que le café refroidisse avant d'y ajouter le lait.

**Question posée aux élèves :** qui d'Aline ou de Bertrand a bu le café au lait le plus chaud ?

**Données :**

- Chaque café est servi à la température de  $48^\circ\text{C}$ .
- La température ambiante  $T_a$ , qui est aussi celle du lait, est de  $22^\circ\text{C}$ .
- Chaque tasse contient 15 cL de café et chacun y ajoute 3 cL de lait.
- Lorsque l'on mélange un volume  $V_1$  d'un premier liquide à température  $T_1$  et un volume  $V_2$  d'un second liquide à température  $T_2$ , on obtient un liquide dont la température est égale à

$$\frac{V_1 T_1 + V_2 T_2}{V_1 + V_2}.$$

- L'évolution, à partir d'un temps initial  $t_0 = 0$ , de la température d'un liquide est modélisée par l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad T'(t) = -0,04 (T(t) - T_a),$$

où  $T_a$  désigne la température ambiante exprimée en degré Celsius,  $T(t)$  la température du liquide exprimée en degré Celsius à l'instant  $t$  (exprimé en minute) et  $T'(t)$  la valeur à l'instant  $t$  de la dérivée de la fonction  $T$ .

La théorie des équations différentielles n'étant pas au programme des classes de première, le professeur décide d'utiliser une méthode de résolution approchée, appelée méthode d'Euler, dont le principe est le suivant :

**Méthode d'Euler** : on part d'une condition initiale  $T(0) = \alpha$ , où  $\alpha$  est un nombre réel, et d'une relation

$$(\mathcal{R}) \quad T'(t) = F(T(t)),$$

vérifiée par une fonction  $T$  dérivable sur  $[0, a]$ , où  $a$  est un réel strictement positif et  $F$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . On détermine une valeur approchée de  $T(a)$  selon le procédé détaillé ci-dessous.

On choisit un entier  $n$  strictement positif.

On détermine une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = a$  partageant l'intervalle  $[0, a]$  en  $n$  intervalles de même longueur.

On pose  $y_0 = \alpha$ . On note  $\mathcal{D}_0$  la droite passant par le point  $A_0$  de coordonnées  $(t_0; y_0)$  et de coefficient directeur  $F(y_0)$ .

On note  $A_1$  le point d'abscisse  $t_1$  de la droite  $\mathcal{D}_0$ . L'ordonnée  $y_1$  de ce point est prise comme valeur approchée de  $T(t_1)$ .

On note  $\mathcal{D}_1$  la droite passant par  $A_1$  et de coefficient directeur  $F(y_1)$ . On note  $A_2$  le point de  $\mathcal{D}_1$  d'abscisse  $t_2$ . L'ordonnée  $y_2$  de ce point est prise comme valeur approchée de  $T(t_2)$ .

On itère ce processus jusqu'à  $y_n$ , qui est pris comme valeur approchée de  $T(a)$ .

## Partie A : mise en œuvre de la méthode d'Euler

Soit  $n$  un entier strictement positif. On applique la méthode d'Euler à l'équation différentielle  $(\mathcal{E})$ . On note  $T_n(3)$  la valeur approchée de  $T(3)$  obtenue selon le procédé détaillé ci-dessus. Dans toute la suite, on note  $(t_k, y_k)$  les coordonnées des points  $A_k$  construits à la  $k$ -ième étape de la méthode d'Euler.

- I. Exprimer les réels  $t_0, \dots, t_n$  subdivisant le segment  $[0, 3]$  en  $n$  intervalles de même longueur.
- II. Pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , déterminer une équation de la droite  $\mathcal{D}_k$ .
- III. En déduire que  $y_{k+1} = \left(1 - \frac{0,12}{n}\right) y_k + \frac{2,64}{n}$ .
- IV. Le professeur demande aux élèves de donner des valeurs approchées des températures du café de Bertrand et du café au lait d'Aline au bout de trois minutes à l'aide de la méthode d'Euler. Voici la production d'un élève ayant utilisé un tableur pour calculer la température du café de Bertrand :

|    | A                    | B                |
|----|----------------------|------------------|
| 1  | Température ambiante | 22               |
| 2  | Température initiale | 48               |
| 3  | n                    | 20               |
| 4  |                      |                  |
| 5  | Temps                | Température café |
| 6  | 0                    | 48               |
| 7  | 1                    | 47,844           |
| 8  | 2                    | 47,688936        |
| 9  | 3                    | 47,534802384     |
| 10 | 4                    | 47,3815935697    |
| 11 | 5                    | 47,2293040083    |
| 12 | 6                    | 47,0779281842    |

1. Quelle formule l'élève a-t-il pu saisir dans la cellule B7 pour obtenir ces résultats en étirant la formule vers le bas et en utilisant les données contenues dans les cellules B1, B2 et B3 ?
  2. Comment l'élève peut-il modifier sa production pour calculer une valeur approchée de la température du café au lait d'Aline au bout de trois minutes ?
- V.
1. Écrire un algorithme permettant d'obtenir  $y_n$  à partir des entrées  $\alpha = T(0)$  et  $n \in \mathbb{N}$ .
  2. Utiliser cet algorithme pour répondre à la question posée dans le problème en prenant  $n = 20$ .

## Partie B : résolution exacte

- I. Soit  $\alpha$  un réel strictement positif. Déterminer la solution exacte du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) &= -0,04 (y(t) - 22) \\ y(0) &= \alpha \end{cases}$$

- II. En appliquant le résultat de la question précédente pour deux valeurs bien choisies de  $\alpha$ , répondre à la question posée aux élèves. On donnera une valeur approchée décimale de la température en degré Celsius des cafés au lait d'Aline et de Bertrand à  $10^{-2}$  près.

## Partie C : étude de la convergence de la méthode d'Euler

On étudie la convergence de la suite  $(T_n(3))_{n \geq 1}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  lorsque l'on prend la condition initiale  $\alpha = 48$ .

- I. Dans cette question,  $n$  est fixé.

1. Donner deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,

$$y_{k+1} = ay_k + b.$$

2. Déterminer le réel  $\ell$  tel que  $\ell = a\ell + b$ .

3. En considérant la suite  $(y_k - \ell)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , exprimer  $y_n = T_n(3)$  en fonction de  $n$ .

- II. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(3)$  et comparer avec le résultat obtenu dans la partie B.

- III. Déterminer un équivalent de  $|T(3) - T_n(3)|$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .