Problème : Comparaison de convergences

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I.

1. **(a)** Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

(b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I.

2. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.

3. On pose pour $x \in [0;1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0;1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0;1]$.

4. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I, a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?

On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série entière.

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0;1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n\, x^n(1-x)$.

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I.

6. **(a)** Calculer pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

(b) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.

7. **(a)** Calculer pour tout $x \in I$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

(b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I.
On pourra observer que pour $k \geq n+1$, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.

(c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

8. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que :

(a) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur I.

(b) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

(c) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

9. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 12 1232 – D'après documents fournis