Feuille 1 : Sous-variétés

Exercice 1. Ouverts difféomorphes. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ donnés sont difféomorphes. Pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, $B(p,r)$ désigne la boule euclidienne ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre p et de rayon r, et $\bar{B}(p,r)$ la boule fermée correspondante.

1. $B(0,1)$ et $B(p,r)$;
2. $]-1,1[^n$ et $\mathbb{R}^n$;
3. $B(0,1)$ et $\mathbb{R}^n$;
4. $B(0,1)$ et $]-1,1[^n$;
5. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $B(0,2) \setminus \bar{B}(0,1)$;
6. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^n$;
7. $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (ici $n = 2$).

Exercice 2. Difféomorphismes et changements de coordonnées.

1. À tout point p de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ du plan $\mathbb{R}^2$ on associe d'une part ses coordonnées cartésiennes (x,y) et d'autre part ses coordonnées polaires $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$. Exprimer les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées polaires, et montrer que l'application ainsi obtenue définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.
2. À tout point p de $\mathbb{R}^n$ on associe d'une part ses coordonnées $(x_1,...,x_n)$ dans la base canonique, et d'autre part ses coordonnées $(y_1,...,y_n)$ dans une autre base. Exprimer les secondes en fonction des premières à l'aide d'une matrice de passage, et montrer que l'application correspondante définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

Exercice 3. La sphère comme sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner les valeurs critiques de la fonction $\|.\|^2 : (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} \phi : & U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,y,\|(x,y,z)\|^2 - 1) \end{array}$$
induit un difféomorphisme sur son image. Quelle est l'image par ϕ de $\mathbb{S}^2 \cap U$? À l'aide d'autres applications du même type, retrouver le résultat de la question précédente.
3. Retrouver encore une fois ce résultat à l'aide de l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 1\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}). \end{array}$$
On utilisera une troisième définition des sous-variétés. Faire le lien entre les questions 1 et 3 et le théorème des fonctions implicites.

Exercice 4. Et si on enlève des hypothèses...

1. (Si on enlève "submersion"...) Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$: $\{(x,y,z)/x^2+y^2-z^2=0\}$? $\{(x,y,z)/x^2+y^2-z^2=1\}$?

2. (Si on enlève "immersion"...) Montrer que le graphe de $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$.

3. (Si on enlève "homéomorphisme sur son image"...) Montrer que l'application $t \in \,]-\pi,\pi[\, \mapsto (\sin t, \sin t \cos t) \in \mathbb{R}^2$ est une immersion injective. Son image est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Le tore de révolution. On appelle T la surface de révolution obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) le cercle $C_0 \subset \{y=0\}$ de centre $(2,0,0)$ et de rayon 1.

1. Trouver une équation de T de la forme $F(x,y,z)=0$. En déduire que T est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

2. Retrouver ce résultat à l'aide de l'application

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\phi) & \mapsto & ((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta). \end{array}$$

3. * Plus généralement, étant donnée une courbe lisse Γ (i.e. une sous-variété de dimension 1) dans le demi-plan vertical $\mathbb{R}_+^* \times \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, montrer que la surface de révolution obtenue en faisant tourner Γ autour de l'axe des z est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Un "autre" tore.

1. Montrer que si M et N sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, alors $M \times N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{m+n}$ (naturellement identifié à $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$).

2. En déduire que $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ est une sous-variété de $(\mathbb{R}^2)^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. On verra dans un prochain exercice que $\mathbb{T}^2$ est difféomorphe au T de l'exercice précédent, au sens des variétés.

Exercice 7. Groupes classiques.

1. Montrer que l'application déterminant de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1. On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indices (i,j) qui vaut 1. Calculer la dérivée de l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \det(I_n + tE_{i,j})$. En déduire la différentielle de det en l'identité, puis en toute matrice inversible. On l'exprimera à l'aide de la comatrice. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ et en déduire la différentielle de det en tout point de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 1\}$ sont des sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$. Préciser leur dimension et expliciter leur plan tangent en I_n puis en tout point.

3. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM \end{array}$$

est une submersion en tout point de $GL_n(\mathbb{R})$. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension et le plan tangent en I_n.