Feuille 2 : sphères, tores, projectifs

Exercice 1. Sphères par projections stéréographiques. Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de la topologie induite. On note $N = (0, \ldots, 0, 1)$ et $S = (0, \ldots, 0, -1)$ les pôles nord et sud respectivement.

1. Vérifier que les projections stéréographiques ϕ_N et ϕ_S par rapport aux pôles nord et sud sont des homéomorphismes de $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ respectivement sur $\mathbb{R}^n$.

   Rappel. ϕ_N (resp. ϕ_S) est défini par : pour tout $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ (resp. $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$), $(\phi_N(x), 0)$ (resp. $(\phi_N(x), 0)$) est l'unique point d'intersection de la droite (Nx) (resp. (Sx)) avec l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

2. Montrer que l'on définit ainsi deux cartes compatibles de $\mathbb{S}^n$, qui munissent la sphère d'une structure de variété différentiable.

3. Vérifier que l'injection canonique $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ est de classe C^∞. Montrer qu'une application $f : X \to \mathbb{S}^n$, où X est une variété, est de classe C^∞ ssi $i \circ f$ l'est. Utiliser ce critère pour construire une injection C^∞ de $\mathbb{S}^p$ dans $\mathbb{S}^{p+n}$.

4. Vérifier que la structure de variété différentiable définie dans cet exercice coïncide avec celle dont $\mathbb{S}^n$ hérite en tant que sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 2. Quelques résultats théoriques.

1. Soient M, N, et P des variétés différentiables. Montrer que si $f : M \to N$ et $g : N \to P$ sont différentiables, alors $g \circ f : M \to P$ l'est aussi.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable et M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, munie de la structure différentiable induite. Montrer que $f_{|M} : M \to \mathbb{R}^p$ est différentiable.

3. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable et M une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ telle que $f(U) \subset M$. Montrer que l'application induite $\bar{f} : x \in U \mapsto f(x) \in M$ est différentiable.

Exercice 3. Quadriques. Dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, identifié à $\mathbb{R}^{n+p}$, on considère la quadrique d'équation $\|x\|^2 - \|y\|^2 = 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

1. Montrer que c'est une sous-variété difféomorphe à la sous-variété$\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$.

2. Représenter les différents cas pour $n + p = 3$.

"Rappels" sur la topologie quotient. Étant donné un ensemble X et une relation d'équivalence $\sim$ sur X, on note $p : X \to X/\sim$ la projection canonique qui à tout élément x de X associe sa classe d'équivalence pour $\sim$. Si X est un espace topologique, on définit sur $X/\sim$ la topologie quotient par : *U est un ouvert de $X/\sim$ si et seulement si $p^{-1}(U)$ est un ouvert de X.* Pour cette topologie, la projection p est alors trivialement continue, et on vérifie immédiatement qu'une application de $X/\sim$ dans un espace topologique Y est continue ssi $f \circ p : X \to Y$ l'est.

Exercice 4. Tore de dimension 1. Soit $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore de dimension 1, muni de la topologie quotient, et p la projection canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{T}^1$.

1. Montrer que $\mathbb{T}^1$ est connexe, séparé et compact.

2. Définir à partir de la restriction de p à $]0, 1[$ et $]1/2, 3/2[$ deux cartes compatibles de $\mathbb{T}^1$, qui munissent $\mathbb{T}^1$ d'une structure de variété.

3. Vérifier que la projection p est lisse et qu'une application $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ est lisse ssi $f \circ p$ l'est.

4. Montrer que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i\pi x} \in \mathbb{S}^1$ induit un difféomorphisme entre le tore et le cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Tore de dimension n.

1. Reprendre les questions de l'exercice précédent pour le tore de dimension n, $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

2. Montrer, à l'aide de l'application

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (\theta,\phi) & \mapsto & ((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta). \end{array}$$

que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est difféomorphe au tore de révolution $T \subset \mathbb{R}^3$ obtenu en faisant tourner autour de l'axe (Oz) le cercle $C_0 \subset \{y=0\}$ de centre $(2,0,0)$ et de rayon 1. On pourra pour cela montrer que h est une immersion d'image T, qui induit une immersion bijective $\bar{h} : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to T$, et que cette dernière est en fait un difféomorphisme.

Exercice 6. Espace projectif réel. On définit l'espace projectif réel $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ comme l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$, muni de la topologie quotient. On note $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ la projection naturelle.

1. Montrer que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est connexe, séparé et compact.

2. Pour $i = 0, \ldots, n$, on considère l'ensemble $V_i \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ des droites qui ne sont pas contenues dans l'hyperplan $\{x_i = 0\}$ et on définit φ_i l'application $V_i \to \mathbb{R}^n$ qui associe à une droite son intersection avec l'hyperplan affine $\{x^i = 1\} \simeq \mathbb{R}^n$. Vérifier que l'on définit ainsi des cartes compatibles qui recouvrent le projectif.

3. Montrer que la projection p est de classe C^∞ et qu'une fonction $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to X$ (X variété) est de classe C^∞ ssi $f \circ p$ l'est.

4. Montrer que l'inclusion $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ induit un homéomorphisme entre $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ et $\mathbb{S}^n/(x \sim -x)$ muni de la topologie quotient.

5. Montrer qu'il existe une unique structure de variété différentiable sur $\mathbb{S}^n/(x \sim -x)$ telle que la projection $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/(x \sim -x)$ soit un C^∞-difféomorphisme local en tout point. Montrer que l'homéomorphisme de la question précédente est alors un difféomorphisme.

Exercice 7. Projectifs de petite dimension.

1. Montrer que $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ est difféomorphe au cercle.

2. (Plongement de Véronèse) Montrer que $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ se plonge dans $\mathbb{R}^6$ via l'application définie sur $\mathbb{S}^2$

$$(x,y,z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz).$$

3. Quant à $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$... On montrera dans une feuille ultérieure qu'il est difféomorphe à $SO(3)$.

Exercice 8. Droites projectives. On appelle droite projective, tout partie de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ image par la projection canonique p d'un sous espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension 2.

1. Montrer qu'une droite projective est une sous-variété de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ difféomorphe à $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$.

2. Montrer que le complémentaire d'une droite projective dans $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ s'identifie à un plan affine de dimension 2. Que peut-on dire de l'intersection d'une autre droite projective avec ce plan?

3. Montrer que deux droites projectives du plan projectif $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ se coupent en exactement un point ou sont confondues.

Exercice 9. Espace projectif complexe. On définit l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ comme l'ensemble des droites vectorielles (complexes) de $\mathbb{C}^{n+1}$, muni de la topologie quotient ($\mathbb{C}^{n+1}$ étant identifié à $(\mathbb{R}^2)^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$. On note $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ la projection naturelle.

1. Donner une structure de variété différentielle à $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

2. Montrer que $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$.