Feuille 4

Exercice 1. Considérons les champs de vecteurs

$$X(x,y) = (x,y), \qquad Y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}X(x,y), \qquad Z(x,y) = (-y,x)$$

sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Exprimer les champs X, Y, Z en coordonnées polaires.

Exercice 2. Champ de vecteurs non complet. Déterminer le flot du champ de vecteurs $X : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R} \simeq T_x\mathbb{R}$, et en particulier son ensemble de définition.

Exercice 3. Flots qui ne commutent pas. On définit sur $\mathbb{R}^3$ les champs de vecteurs X et Y par :

$$X(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad Y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

1. Calculer $[X,Y]$.
2. Déterminer les flots ϕ^t et ψ^t de X et Y.
3. Pour un point $p = (x,y,z)$ donné, représenter le chemin $s \in [0,1] \mapsto \phi^s(p)$ suivi de $t \in [0,1] \mapsto \psi^t(\phi^1(p))$, puis le chemin $t \in [0,1] \mapsto \psi^t(p)$ suivi de $s \in [0,1] \mapsto \phi^s(\psi^1(p))$. Que remarque-t-on ?
4. Calculer, pour tout $p \in \mathbb{R}^3$, $\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}(\psi^t \circ \phi^s \circ \psi^{-t} \circ \phi^{-s}(p)\big|_{s=0,t=0}$, et retrouver le résultat de la première question.
5. *(Un peu de dessin)* Représenter, pour p parcourant les axes (Ox), (Oy) et (Oz), (un petit morceau de) l'espace affine $p + \mathrm{Vect}(X(p), Y(p))$.