Feuille 5

Exercice 1. Crochet de champs de vecteurs linéaires. Étant donnée une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note X_A le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ défini par $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax \in T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Écrire X_A et X_B "en coordonnées" et calculer $[X_A, X_B]$. Vérifier en particulier qu'il s'agit aussi d'un champ de vecteurs linéaires.

2. Retrouver ce résultat en utilisant la formule $[X,Y] = \frac{d}{dt}(\varphi_X^t)^*Y\big|_{t=0}$.

Exercice 2. Encore le changement de coordonnées cartésiennes/polaires.

1. Définir sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ des champs de vecteurs X_r et X_θ formant en tout point une base orthonormée positive, telle que X_r soit radial sortant. Calculer leurs flots. Calculer leur crochet de Lie.

2. Si (x,y) et (r,θ) désignent respectivement les coordonnées polaires et cartésiennes d'un point de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\}$, calculer les expressions de $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$, et calculer leur crochet de Lie. Quel est le rapport entre X_r, X_θ et $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$?

Exercice 3. Groupe unitaire. On considère le sous-groupe

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), A\bar{A}^t = I_n\}$$

de $GL_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $U(n)$ est un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$.

2. Déterminer son espace tangent en I_n et sa dimension.

3. Montrer que $U(n)$ est compact.

4. Montrer que le déterminant définit un morphisme de groupes surjectif et submersif de $U(n)$ dans $U(1) \cong \mathbb{S}^1$.

5. En déduire que le noyau de ce morphisme, $SU(n)$, est également un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{C})$ et déterminer sa dimension.

6. Montrer que $SU(n)$ agit transitivement sur $\mathbb{S}^{2n-1}$, avec stabilisateur isomorphe à $SU(n-1)$. En déduire que $\mathbb{S}^{2n-1}$ est difféomorphe à $SU(n)/SU(n-1)$.

7. En déduire que $\mathbb{S}^3$ est difféomorphe à $SU(2)$. Expliciter un tel difféomorphisme et son inverse.

Exercice 4. Fibration de Hopf. (Re)munir $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}^*$ d'une structure de variété différentiable en utilisant les résultats de cours sur les actions de groupes de Lie. Justifier que $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ (quelle est l'action de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{S}^{2n+1}$ considérée ? la structure différentiable sur le quotient $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$?)

Exercice 5. Groupe de Heisenberg. Considérons le sous-groupe H de $GL(3,\mathbb{R})$ constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que H est bien un sous-groupe de Lie de $GL(3, \mathbb{R})$.
2. Montrer que l'algebre de Lie de H, notée Lie(H), est isomorphe à

$$\langle X, Y, Z \,:\, [X,Y] = Z,\ [X,Z] = 0,\ [Y,Z] = 0 \rangle.$$

3. Montrer par un calcul direct que l'application exponentielle

$$\exp : \mathrm{Lie}(H) \to H$$

   est un difféomorphisme.
4. Montrer que l'on a l'identité

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A,B])$$

   pour tous $A, B \in \mathrm{Lie}(H)$.