Feuille 6 : Orientabilité

Exercice 1. Orientabilité de la sphère. Donner un *atlas d'orientation* de la sphère $\mathbb{S}^n$, c'est-à-dire un atlas de $\mathbb{S}^n$ dont les changements de carte ont un jacobien partout strictement positif.

Exercice 2. Hypersurfaces de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que tout niveau régulier M d'une fonction lisse $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ admet une normale unitaire lisse, c'est-à-dire une application lisse $\nu : M \to \mathbb{S}^{n-1}$ telle qu'en tout point x de M, $\nu(x)$ soit orthogonal à l'espace tangent T_xM.

2. Montrer qu'une hypersurface quelconque M de $\mathbb{R}^n$ est orientable si et seulement si elle admet une normale unitaire lisse. Retrouver ainsi l'orientabilité de la sphère $\mathbb{S}^n$.

3. Montrer que le ruban de Mœbius n'est pas orientable.

Exercice 3. Non-orientabilité

1. Montrer qu'une variété n'est pas orientable si elle admet deux cartes (U, φ) et (V, ψ) telles que U et V soient connexes et $\det(d\varphi_x \circ (d\psi_x)^{-1})$ prenne à la fois des valeurs positives et négatives lorsque x décrit $U \cap V$.

2. Redémontrer que le ruban de Mœbius n'est pas orientable.

3. Montrer que l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est orientable si et seulement si n est impair.

Exercice 4. Orientabilité des espaces projectifs (bis). On considère $\mathbb{RP}^n$ comme le quotient de $\mathbb{S}^n$ par $\{\pm \mathrm{Id}\}$ et on note $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ la projection canonique. On note en outre ω_0 la forme volume de $\mathbb{S}^n$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{S}^n, \quad \forall (v_1, ..., v_n) \in T_x\mathbb{S}^n, \quad (\omega_0)_x(v_1, ..., v_n) = \det(x, v_1, ..., v_n).$$

Supposons que $\mathbb{RP}^n$ admette une forme volume α.

1. Montrer que $\omega = p^*\alpha$ est une forme volume sur $\mathbb{S}^n$ satisfaisant $(-\mathrm{Id})^*\omega = \omega$.

2. Il existe donc une fonction f lisse et de signe constant sur $\mathbb{S}^n$ telle que $\omega = f\omega_0$. Calculer $(-\mathrm{Id})^*\omega_0$ puis $(-\mathrm{Id})^*\omega$ en fonction de ω_0. En déduire que n est nécessairement impair, et que les espaces projectifs de dimension paire ne sont donc pas orientables.

3. Soit Γ un groupe discret agissant librement et proprement sur une variété X et $p : X \to V/\Gamma$ l'application de revêtement sur la variété quotient. Montrer que pour toute forme différentielle ω sur X satisfaisant

$$\gamma^*\omega = \omega \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

il existe sur X/Γ une unique forme différentielle α telle que $p^*\alpha = \omega$, qui est une forme volume si ω l'est.

4. En déduire que les espaces projectifs de dimension impaire sont orientables.

Exercice 5. Variétés complexes. Montrer que toute variété complexe est orientable. On rappelle qu'une variété différentiable est une variété complexe si (elle est de dimension réelle paire et qu') elle possède un atlas dont les changements de cartes, vus comme applications entre ouverts de $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, sont holomorphes.