Feuille 6 : formes différentielles, intégration

Exercice 1. Coordonnées polaires. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ de longueur inférieure à 2π et φ le difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times I$ dans $\varphi(\mathbb{R}_+^* \times I)$ défini par $\varphi(\rho, t) = (\rho \cos t, \rho \sin t)$. Soit (r, θ) le système de coordonnées sur $\varphi(\mathbb{R}_+^* \times I)$ défini par $\varphi_I^{-1} = (r, \theta)$. Montrer que les formes dr et $d\theta$ s'étendent à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ en des formes indépendantes de I.

Exercice 2. Formes différentielles et projection stéréographique. Rappelons que l'on définit sur la sphère par projection stéréographique deux systèmes de coordonnées $(U_N = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, x_N, y_N)$ et $(U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, x_S, y_S)$. L'on a

$$(x_S, y_S) = \tfrac{(x_N, y_N)}{\rho_N} \text{ avec } \rho_N = x_N^2 + y_N^2.$$

1. Exprimer dx_S, dy_S, $dx_S \wedge dy_S$ en fonction de dx_N, dy_N et $dx_N \wedge dy_N$.
2. Vérifier que la 2-forme ω donnée sur U_S et U_N par

$$\omega|_{U_N} = -4\tfrac{dx_N \wedge dy_N}{(1+\rho_N)^2}, \qquad \omega|_{U_S} = 4\tfrac{dx_S \wedge dy_S}{(1+\rho_S)^2}$$

   est bien définie sur la sphère.

Produit intérieur. Étant donnés un champ de vecteurs X et une forme différentielle ω de degré $k+1$ sur une variété M, on appelle produit intérieur de ω par X et on note $\iota_X \omega$ la k-forme différentielle sur M définie par :

$$\forall x \in M, \quad \forall (v_1, \ldots, v_k) \in (T_x M)^k, \quad (\iota_X \omega)_x(v_1, \ldots, v_k) = \omega_x(X(x), v_1, \ldots, v_k).$$

Exercice 3. Volume d'une hypersurface orientée de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit M une hypersurface orientée de $\mathbb{R}^{n+1}$, i l'inclusion de M dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\nu : M \to \mathbb{S}^n$ le champ normal unitaire *orienté* de M (*i.e.* tel que pour tout $x \in M$ et toute base *directe* $(v_1, \ldots, v_n)$ de $T_x M$, $(\nu(x), v_1, \ldots, v_n)$ forme une base directe de $\mathbb{R}^{n+1}$). Soit $\tilde{\nu}$ un champ de vecteurs au voisinage de M prolongeant ν. On définit :

$$\sigma = i^*(\iota_{\tilde{\nu}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}).$$

1. Montrer que σ ne dépend pas du choix de $\tilde{\nu}$, et que c'est l'unique forme volume sur M satisfaisant $\sigma_x(v_1, \ldots, v_n) = 1$ pour toute base orthonormée directe $(v_1, \ldots, v_n)$ de $T_x M$, pour tout $x \in M$. On dit que c'est la forme volume canonique de l'hypersurface orientée M de $\mathbb{R}^{n+1}$. On définit alors le *volume* de M comme :

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_M \sigma.$$

2. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lisse définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Son graphe G est une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$, que l'on peut munir d'une orientation naturelle. Soit σ la forme volume associée et φ l'application $x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Déterminer le champ normal unitaire orienté ν de G et montrer que

$$\varphi^* \sigma = \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\right)^{1/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

   et récupérer les formules de calcul des aires et longueurs déjà connues (?).

Exercice 4. Volume de la sphère. On note $X = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ le champ d'Euler de $\mathbb{R}^3$, ω la forme volume $dx \wedge dy \wedge dz$ de $\mathbb{R}^3$ et i le plongement de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que X, ω et $\beta = \iota_X \omega$ sont invariants par rotation.

2. Vérifier que la restriction à $\mathbb{S}^2$ de β est une forme volume.

3. Comparer $i^*\beta$ avec la forme ω de l'exercice 2. On pourra commencer par les comparer sur U_S, où $(U_S, \phi_S, \mathbb{R}^2)$ est la carte de $\mathbb{S}^2$ obtenue par projection stéréographique par rapport au pôle sud, satisfaisant :
$$\phi_S^{-1}(u,v) = \left(\tfrac{2u}{1+u^2+v^2}, \tfrac{2v}{1+u^2+v^2}, \tfrac{1-(u^2+v^2)}{1+u^2+v^2}\right).$$

4. Calculer le volume de la sphère.

Théorème de Fubini. On admet l'analogue suivant du théorème de Fubini : *Soient X et Y deux variétés compactes orientées, $X \times Y$ leur produit muni de l'orientation produit. Soient $p : X \times Y \to X$ et $q : X \times Y \to Y$ les projections canoniques. Alors si $\alpha \in \Omega^{\dim X}(X)$ et $\beta \in \Omega^{\dim Y}(Y)$,*
$$\int_{X\times Y} p^*\alpha \wedge q^*\beta = \left(\int_X \alpha\right)\left(\int_Y \beta\right).$$
Ce résultat reste vrai pour des variétés non compactes si l'on suppose α et β de signe constant (dans ce cas le membre de gauche est fini si et seulement si celui de droite l'est, et sinon on a l'égalité $\pm\infty = \pm\infty$).

Exercice 5. Dans la situation ci-dessus, et plus généralement pour $\alpha \in \Omega^k(X)$ et $\beta \in \Omega^l(Y)$, on note abusivement $\alpha\wedge\beta$ la $(k+l)$-forme $p^*\alpha\wedge q^*\beta$ sur $X\times Y$. Vérifier que si $(u_1, \dots, u_k) \in (T_xX)^k$ et $(v_1, \dots, v_l) \in (T_yY)^l$,
$$(\alpha \wedge \beta)_{(x,y)}(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l) = \alpha(u_1, \dots, u_k)\beta(v_1, \dots, v_l).$$

Exercice 6. Volumes des sphères et boules unité. Pour déterminer ces volumes, nous allons calculer de deux façons différentes l'intégrale
$$I = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\|x\|^2} dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

1. À l'aide du théorème de Fubini, exprimer I en fonction de
$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

2. On définit $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ par $F(r,u) = ru$. Montrer que
$$F^*(dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n) = r^n dr \wedge \sigma$$
où σ désigne la forme volume canonique sur $\mathbb{S}^n$ (on pourra par exemple évaluer ces deux formes sur une base bien choisie). En déduire que
$$I = \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n) \int_0^{+\infty} r^n e^{-r^2} dr.$$
Déduire de cette égalité, dans le cas $n = 1$, la valeur de J, puis exprimer $\int_0^{+\infty} r^n e^{-r^2} dr$ en fonction de la fonction Γ d'Euler définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

3. En déduire que
$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n) = 2\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

4. Montrer que $d\sigma = (n+1)(dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n)$ et en déduire que
$$\mathrm{Vol}(B^{n+1}(1)) = \frac{1}{n+1}\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n).$$