Feuille 7 : Algèbre extérieure et formes différentielles

Exercice 0. Produit extérieur. Soit E un espace vectoriel. Pour tous entiers positifs k, l et toutes formes $\alpha \in A_k(E)$ et $\beta \in A_l(E)$, on définit

$$\alpha \wedge \beta : (v_1, \ldots, v_{k+l}) \in E^{k+l} \mapsto \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \epsilon(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

1. Que donne cette formule dans le cas où α et $\beta \in E^*$?
2. Montrer que $\alpha \wedge \beta \in A_{k+l}(E)$.
3. Vérifier que l'application $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ est bilinéaire et que

$$\forall(\alpha, \beta) \in A_k(E) \times A_l(E), \quad \beta \wedge \alpha = (-1)^{kl}\alpha \wedge \beta.$$

On vérifie également que pour toutes formes multilinéaires alternées α, β et γ, $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$. On notera donc simplement $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ cette forme. Plus généralement, étant données n formes multilinéaires alternées $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, on peut définir sans ambiguïté $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$.

Exercice 1. Premiers pas. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $l_1, \ldots, l_k \in E^*$.

1. Montrer que pour tout $(v_1, \ldots, v_k) \in E^k$,

$$l_1 \wedge \ldots \wedge l_k(v_1, \ldots, v_k) = \det(l_j(v_i))_{1 \leq i,j \leq k}.$$

2. On note $(dx_1, ..., dx_n)$ (resp. (dx, dy, dz)) la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^3$). Soit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ des entiers. Vérifier que la forme k-linéaire alternée dx^I définie en cours n'est autre que $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$.
3. Soient $\alpha = 3dx + 5dy$, $\beta = dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$, $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 2, 0)$ et $v_3 = (1, 2, 3)$. Calculer $(\alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3)$.
4. Montrer qu'une famille de formes linéaires $(l_1, \ldots, l_k)$ d'un espace vectoriel E est libre si et seulement si $l_1 \wedge \ldots \wedge l_k \neq 0$. Montrer que des vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ de E sont linéairement dépendants si et seulement si $\alpha(x_1, \ldots, x_k) = 0$ pour toute forme alternée α de degré k.

Exercice 2. Coordonnées polaires. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ de longueur inférieure à 2π et φ le difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times I$ dans $\varphi(\mathbb{R}_+^* \times I)$ défini par $\varphi(\rho, t) = (\rho \cos t, \rho \sin t)$. Soit (r, θ) le système de coordonnées sur $\varphi(\mathbb{R}_+^* \times I)$ défini par $\varphi_I^{-1} = (r, \theta)$. Montrer que les formes dr et $d\theta$ s'étendent à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ en des formes indépendantes de I.

Exercice 3. Formes différentielles et projection stéréographique. Rappelons que l'on définit sur la sphère par projection stéréogra-phique deux systèmes de coordonnées $(U_N = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, x_N, y_N)$ et $(U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, x_S, y_S)$. L'on a

$$(x_S, y_S) = \frac{(x_N, y_N)}{\rho_N} \text{ avec } \rho_N = x_N^2 + y_N^2.$$

1. Exprimer dx_S, dy_S, $dx_S \wedge dy_S$ en fonction de dx_N, dy_N et $dx_N \wedge dy_N$.

2. Vérifier que la 2-forme ω donnée sur U_S et U_N par

$$\omega|_{U_N} = -4\frac{dx_N \wedge dy_N}{(1+\rho_N)^2}, \qquad \omega|_{U_S} = 4\frac{dx_S \wedge dy_S}{(1+\rho_S)^2}$$

est bien définie sur la sphère.

Produit intérieur. Étant donnés un champ de vecteurs X et une forme différentielle ω de degré $k+1$ sur une variété M, on appelle produit intérieur de ω par X et on note $\iota_X\omega$ la k-forme différentielle sur M définie par :

$$\forall x \in M, \quad \forall (v_1, \dots, v_k) \in (T_xM)^k, \quad (\iota_X\omega)_x(v_1, \dots, v_k) = \omega_x(X(x), v_1, \dots, v_k).$$

Exercice 4. Volume d'une hypersurface orientée de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit M une hypersurface orientée de $\mathbb{R}^{n+1}$, i l'inclusion de M dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\nu : M \to \mathbb{S}^n$ le champ normal unitaire *orienté* de M (*i.e.* tel que pour tout $x \in M$ et toute base *directe* $(v_1, \dots, v_n)$ de T_xM, $(\nu(x), v_1, \dots, v_n)$ forme une base directe de $\mathbb{R}^{n+1}$). Soit $\tilde{\nu}$ un champ de vecteurs au voisinage de M prolongeant ν. On définit :

$$\sigma = i^*(\iota_{\tilde{\nu}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}).$$

1. Montrer que σ ne dépend pas du choix de $\tilde{\nu}$. Évaluer σ sur une base orthonormée directe de T_xM. Montrer que σ définit une forme volume sur M. C'est *la* forme volume canonique de l'hypersurface orientée M de $\mathbb{R}^{n+1}$. On définit alors le *volume* de M comme :

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_M \sigma.$$

2. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lisse définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Son graphe G est une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$, que l'on peut munir d'une orientation naturelle. Soit σ la forme volume associée et φ l'application $x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que

$$\varphi^*\sigma = \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\right)^{1/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

et récupérer les formules de calcul des aires et longueurs déjà connues (?).

Exercice 5. Volume de la sphère. On note $X = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ le champ d'Euler de $\mathbb{R}^3$, ω la forme volume $dx \wedge dy \wedge dz$ de $\mathbb{R}^3$ et i le plongement de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que X, ω et $\beta = \iota_X\omega$ sont invariants par rotation.

2. Vérifier que la restriction à $\mathbb{S}^2$ de β est une forme volume.

3. Comparer $i^*\beta$ avec la forme ω de l'exercice 3. On rappelle que

$$i \circ \varphi_V^{-1} : (x_S, y_S) \to (x, y, z) = \left(\frac{2x_S}{1+\rho_S}, \frac{2y_S}{1+\rho_S}, \frac{1-\rho_S}{1+\rho_S}\right)$$

ou $(V, \varphi_V, \mathbb{R}^2)$ est la carte de $\mathbb{S}^2$ obtenue par projection stéréographique par rapport au pôle sud.

4. Calculer le volume de la sphère.