Feuille 7 : différentielle extérieure, orientation, formule de Stokes

---

Exercice 1. Calculer $d\alpha$, $d\beta$, $d\omega$, $d\eta$ et $d\epsilon$ avec :

$$\begin{aligned}
\alpha &= xdx + ydy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)\\
\beta &= \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})\\
\omega &= e^{xz}dx + xcos(z)dy + y^2dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)\\
\eta &= xdx \wedge dy - zdx \wedge dz + xyzdy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)\\
\epsilon &= dx^1 \wedge dx^2 + \cdots + dx^{2n-1} \wedge dx^{2n} \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})
\end{aligned}$$

Exercice 2. Soient $\flat : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ et $\star\flat : \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \to \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ les isomorphismes :

$$\begin{aligned}
&\flat : X = X^1\tfrac{\partial}{\partial x} + X^2\tfrac{\partial}{\partial y} + X^3\tfrac{\partial}{\partial z} \mapsto X^\flat = X^1dx + X^2dy + X^3dz\\
\text{et}\quad &\star\flat : X = X^1\tfrac{\partial}{\partial x} + X^2\tfrac{\partial}{\partial y} + X^3\tfrac{\partial}{\partial z} \mapsto X^1dy \wedge dz + X^2dz \wedge dx + X^3dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Notons formellement $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Étant donné un champ de vecteurs $X = (X^1, X^2, X^3)$, on définit la fonction

$$\nabla \cdot X = \tfrac{\partial X^1}{\partial x} + \tfrac{\partial X^2}{\partial y} + \tfrac{\partial X^3}{\partial z}$$

(produit scalaire formel entre les vecteurs ∇ et X), que l'on appelle *divergence du champ de vecteurs* X, notée encore $\operatorname{dive} X$, et le champ de vecteurs

$$\nabla \times X = \big(\tfrac{\partial X^3}{\partial y} - \tfrac{\partial X^2}{\partial z}, \tfrac{\partial X^1}{\partial z} - \tfrac{\partial X^3}{\partial x}, \tfrac{\partial X^2}{\partial x} - \tfrac{\partial X^1}{\partial y}\big)$$

(produit vectoriel formel entre les vecteurs ∇ et X), que l'on appelle *rotationnel du champ de vecteurs* X, noté encore $\mathbf{rot}X$. Enfin étant donnée une fonction lisse f, on définit un champ de vecteurs appelé *gradient de* f par

$$\nabla f = (\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z})$$

(multiplication formelle du vecteur ∇ par le scalaire f), noté encore $\mathbf{grad}f$.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ les produit scalaire et forme volume canoniques sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que:

1. $X^\flat(Y) = \langle X, Y \rangle$ pour tout $Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$;
2. $\star\flat(X) = \iota_X\omega$;
3. $\mathbf{grad}f = \flat^{-1}(df)$;
4. $d(\star\flat(X)) = (\nabla \cdot X)\omega$, ou encore $d(\iota_X\omega) = (\mathrm{div}X)\omega$;
5. $d(X^\flat) = \star\flat(\nabla \times X)$, ou encore $d(X^\flat) = \iota_{\mathbf{rot}X}\omega$

   (tout ceci permet de définir plus généralement $\star\flat$ et div sur toute variété munie d'une forme volume, $\flat$ et **grad** sur toute variété munie d'une *métrique riemannienne*, et **rot** sur toute variété munie des deux) ;
6. $\nabla \times (\nabla f) = 0$, ou encore $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f) = 0$;
7. $\nabla \cdot (\nabla \times X) = 0$, ou encore $\mathrm{div}(\mathbf{rot}X) = 0$.

Relier les deux dernières identités à la relation $d \circ d = 0$.

Exercice 3. Orientabilité de la sphère. Donner un *atlas d'orientation* de la sphère $\mathbb{S}^n$, c'est-à-dire un atlas de $\mathbb{S}^n$ dont les changements de cartes ont un jacobien partout strictement positif.

Exercice 4. Hypersurfaces de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que tout niveau régulier M d'une fonction lisse $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ admet une normale unitaire lisse, c'est-à-dire une application lisse $\nu : M \to \mathbb{S}^{n-1}$ telle qu'en tout point x de M, $\nu(x)$ soit orthogonal à l'espace tangent T_xM.
2. Montrer qu'une hypersurface quelconque M de $\mathbb{R}^n$ est orientable si et seulement si elle admet une normale unitaire lisse. Retrouver ainsi l'orientabilité de la sphère $\mathbb{S}^n$.
3. Montrer que le ruban de Mœbius n'est pas orientable.

Exercice 5. Non-orientabilité

1. Montrer qu'une variété n'est pas orientable si elle admet deux cartes (U, φ) et (V, ψ) telles que U et V soient connexes et $\det(d\varphi_x \circ (d\psi_x)^{-1})$ prenne à la fois des valeurs positives et négatives lorsque x décrit $U \cap V$.
2. Redémontrer que le ruban de Mœbius n'est pas orientable.
3. Montrer que l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est orientable si et seulement si n est impair.

Exercice 6. Orientabilité des espaces projectifs (bis). On considère $\mathbb{RP}^n$ comme le quotient de $\mathbb{S}^n$ par $\{\pm \mathrm{Id}\}$ et on note $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ la projection canonique. On note en outre ω_0 la forme volume de $\mathbb{S}^n$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{S}^n, \quad \forall (v_1, ..., v_n) \in T_x\mathbb{S}^n, \quad (\omega_0)_x(v_1, ..., v_n) = \det(x, v_1, ..., v_n).$$

Supposons que $\mathbb{RP}^n$ admette une forme volume α.

1. Montrer que $\omega = p^*\alpha$ est une forme volume sur $\mathbb{S}^n$ satisfaisant $(-\mathrm{Id})^*\omega = \omega$.
2. Il existe donc une fonction f lisse et de signe constant sur $\mathbb{S}^n$ telle que $\omega = f\omega_0$. Calculer $(-\mathrm{Id})^*\omega_0$ puis $(-\mathrm{Id})^*\omega$ en fonction de ω_0. En déduire que n est nécessairement impair, et que les espaces projectifs de dimension paire ne sont donc pas orientables.
3. Soit Γ un groupe discret agissant librement et proprement sur une variété X et $p : X \to V/\Gamma$ l'application de revêtement sur la variété quotient. Montrer que pour toute forme différentielle ω sur X satisfaisant

$$\gamma^*\omega = \omega \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

   il existe sur X/Γ une unique forme différentielle α telle que $p^*\alpha = \omega$, qui est une forme volume si ω l'est.
4. En déduire que les espaces projectifs de dimension impaire sont orientables.

Exercice 7. Cas particuliers de la formule de Stokes.

1. *Formule de Green-Riemann.* Soit D un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$ et P, Q de fonctions lisses définies au voisinage de D. Montrer que

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy.$$

2. *Formule d'Ostrogradski.* Soit D un domaine régulier de $\mathbb{R}^3$, $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ et X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\int_{\partial D} \iota_X \omega = \int_D (\mathrm{div} X) \omega.$$

Que devient cette égalité pour $X = P\partial_x + Q\partial_y + R\partial_z$?

On définit en outre le *flux* de X à travers $S = \partial D$, noté $\int_S X$, comme

$$\int_S \langle X, N\rangle \sigma$$

où N désigne le champ normal sortant et $\sigma = \iota_N \omega$ la forme volume canonique sur S. Vérifier que

$$\iota_X \omega_{|S} = \langle X, N\rangle \sigma$$

ce qui entraîne :

$$\int_S X = \int_D (\mathrm{div} X)\omega.$$

3. *Formule de Stokes "classique"*. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe fermée lisse orientée et X un champ de vecteurs au voisinage de Γ. Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation (nécessairement non injective) de Γ (compatible avec l'orientation) et $[a, b] \subset I$ tel que $\gamma([a, b]) = \Gamma$ et $\gamma_{|]a,b[}$ injective. On définit

$$\int_\gamma X := \int_a^b \langle X(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt.$$

   (a) Vérifier que $\int_\gamma X = \int_\Gamma X^\flat$ (cf. exercice 2). Cette quantité ne dépend donc pas de la paramétrisation. On l'appelle circulation de X le long de Γ et on la note $\oint_\Gamma X$.

   (b) On suppose ici que Γ est le bord (orienté) d'un domaine compact S d'une surface orientée de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que

$$\oint_\Gamma X = \int_S \mathbf{rot}(X) \quad \text{(flux du rotationnel à travers } S\text{)}.$$

Exercice 8. Stokes et résidus. Une forme différentielle complexe de degré k sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une application lisse de U dans l'espace des applications k-linéaires alternées de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$. Une telle forme s'écrit de façon unique sous la forme $\alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \Omega^k(U)$. On définit sa différentielle comme la forme différentielle complexe $d\alpha + id\beta$ et son intégrale (sur ce qui a un sens) comme $\int \alpha + i \int \beta$.

Étant donnée une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on désigne par $f(z)dz$ la 1-forme différentielle complexe $f(x + iy)(dx + idy)$ (notamment, $dz := dx + idy$).

1. Si f est de la forme $P + iQ$ avec $P, Q : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimer $d(f(z)dz)$ en fonction des dérivées de P et Q.

2. On rappelle qu'une fonction $\mathbb{R}$-différentiable $f = P+iQ : U \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ (équations de Cauchy-Riemann). Comment cela se traduit-il en termes de la forme $f(z)dz$?

3. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que pour tout domaine compact D de U, $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$.

4. Soit $A \subset U$ un sous-ensemble discret et $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que pour tout domaine compact $D \subset U$ dont le bord ne rencontre pas A,

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in A \cap D} \mathrm{Res}(f, a),$$

où $\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,\varepsilon)} f(z)dz$ pour tout ε suffisamment petit pour que $B(a, \varepsilon) \subset U \setminus A$.