Feuille 8 : Intégration des formes différentielles

On admet l'analogue suivant du théorème de Fubini : *Soient X et Y deux variétés compactes orientées, $X \times Y$ leur produit muni de l'orientation produit. Soient $p : X \times Y \to X$ et $q : X \times Y \to Y$ les projections canoniques. Alors si $\alpha \in \Omega^{\dim X}(X)$ et $\beta \in \Omega^{\dim Y}(Y)$,*

$$\int_{X \times Y} p^*\alpha \wedge q^*\beta = \left(\int_X \alpha\right)\left(\int_Y \beta\right).$$

Ce résultat reste vrai pour des variétés non compactes si l'on suppose α et ω de signe constant (dans ce cas le membre de gauche est fini si et seulement si celui de droite l'est, et sinon on a l'égalité $\pm\infty = \pm\infty$).

Exercice 0. Dans la situation ci-dessus, et plus généralement pour $\alpha \in \Omega^k(X)$ et $\beta \in \Omega^l(Y)$, on note abusivement $\alpha \wedge \beta$ la $(k+l)$-forme $p^*\alpha \wedge q^*\beta$ sur $X \times Y$. Vérifier que si $(u_1, \ldots, u_k) \in (T_xX)^k$ et $(v_1, \ldots, v_l) \in (T_yY)^l$,

$$(\alpha \wedge \beta)_{(x,y)}(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l) = \alpha(u_1, \ldots, u_k)\beta(v_1, \ldots, v_l).$$

Exercice 1. Volumes des sphères et boules unité. Pour déterminer ces volumes, nous allons calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\|x\|^2} dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

1. À l'aide du théorème de Fubini, exprimer I en fonction de

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

2. On définit $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ par $F(r, u) = ru$. Montrer que

$$F^*(dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n) = r^n dr \wedge \sigma$$

   où σ désigne la forme volume canonique sur $\mathbb{S}^n$ (on pourra par exemple évaluer ces deux formes sur une base bien choisie). En déduire que

$$I = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^n) \int_0^{+\infty} r^n e^{-r^2} dr.$$

   Déduire de cette égalité, dans le cas $n = 1$, la valeur de J, puis exprimer $\int_0^{+\infty} r^n e^{-r^2} dr$ en fonction de la fonction Γ d'Euler définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

3. En déduire que

$$\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n) = 2\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

4. Montrer que $d\sigma = (n+1)(dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n)$ et en déduire que

$$\mathrm{vol}(B^{n+1}(1)) = \frac{1}{n+1}\mathrm{vol}(\mathbb{S}^n).$$

Exercice 2. Théorème de la boule chevelue. On se propose de montrer que si n est pair, tout champ de vecteurs sur la sphère $\mathbb{S}^n$ admet au moins un zéro. Supposons que X soit un champ sur $\mathbb{S}^n$ qui ne s'annule pas. On identifie $\mathbb{S}^n$ à la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ muni du produit scalaire standard et donc X à une application de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $X(x)$ et x soient orthogonaux pour tout x. Quitte à remplacer X par $X/\|X\|$, on peut supposer que $\|X(x)\| = 1$ pour tout x. Pour tout $\epsilon > 0$, on introduit l'application Ψ_ϵ de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{R}^{n+1}}\}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\Psi_\epsilon(x) = x + \epsilon X\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

et on note φ_ϵ sa restriction à $\mathbb{S}^n$.

1. Montrer que φ_ϵ est injective lorsque ϵ est suffisamment petit.

2. Montrer que pour ϵ suffisamment petit $d_x\Psi_\epsilon$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{S}^n$.

3. En déduire que φ_ϵ est un plongement lorsque ϵ est suffisamment petit.

4. Montrer par un argument de connexité que son image est la sphère de rayon $r_\epsilon = \sqrt{1+\epsilon^2}$.

5. Par conséquent, φ_ϵ induit un difféomorphisme χ_ϵ de $\mathbb{S}^n$ dans $r_\epsilon\mathbb{S}^n$. On suppose que $\mathbb{S}^n$ et $r_\epsilon\mathbb{S}^n$ sont orientées comme bord des boules de rayon 1 et r_ϵ respectivement. Pourquoi χ_ϵ préserve-t-il l'orientation ?

6. Soit j_ϵ l'inclusion de $r_\epsilon\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, ω la forme volume $dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n$, X le champ d'Euler (défini par $X(x_0, \ldots, x_n) = x_0\partial_{x_0} + \cdots + x_n\partial_{x_n}$) et $\beta = \iota_X\omega$. Montrer que

   $$\int_{r_\epsilon\mathbb{S}^n} j_\epsilon^*\beta$$

   dépend de manière polynomiale de ϵ. On pourra utiliser que $j_\epsilon \circ \chi_\epsilon = \varphi_\epsilon = \Psi_\epsilon \circ j_0$.

7. En utilisant que l'homothétie de rapport r_ϵ induit un difféomorphisme de $\mathbb{S}^n$ dans $r_\epsilon\mathbb{S}^n$, montrer que

   $$\int_{r_\epsilon\mathbb{S}^2} j_\epsilon^*\beta = r_\epsilon^{n+1}\int_{\mathbb{S}^2} j_0^*\beta.$$

   En déduire que n ne peut être pair.

Exercice 3. Théorème de Brouwer. On veut montrer le théorème suivant :

Théorème du point fixe de Brouwer. *Toute application continue d'une boule fermée de l'espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.*

On commence par démontrer le résultat suivant :

Théorème. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant la boule unité fermée B^n. Alors il n'existe pas d'application lisse de U dans $\partial B^n = \mathbb{S}^{n-1}$ dont la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ soit l'identité.*

On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe une telle application $F = (f_1, \ldots, f_n)$. Soit α la 1-forme $x_1 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ sur $\mathbb{R}^n$.

1. Comparer $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \alpha$ et $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} F^*\alpha$.

2. Montrer à l'aide de la formule de Stokes que $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \alpha$ est non nulle.

3. En utilisant l'hypothèse $\sum_{i=1}^n (f_i)^2 = 1$, montrer que les 1-formes df_1,..., df_n forment une famille liée en tout point. En déduire, en utilisant à nouveau Stokes, que $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} F^*\alpha = 0$. Conclure.

On admet le résultat d'approximation suivant :

Lemme. *Pour toute application continue f de la boule unité fermée dans elle-même et tout $\epsilon > 0$, il existe des nombres $r_1 < 1 < r_2$ et une application lisse g de la boule ouverte $B(r_2)$ dans la boule ouverte $B(r_1)$ telle que*

$$\forall x \in B^n, \quad \|f(x) - g(x)\| < \epsilon.$$

Supposons maintenant qu'il existe une application continue sans point fixe de la boule unité fermée dans elle-même.

4. Déduire du lemme ci-dessus l'existence d'une application lisse g sans point fixe de $B(r_2)$ dans $B(r_1)$ avec $r_1 < 1 < r_2$.

5. Pour tout $x \in B(r_2)$, on définit $h(x)$ comme le point d'intersection de la demi-droite $[g(x), x)$ avec $\mathbb{S}^{n-1}$. Justifier que cette application est lisse et aboutir à une contradiction.

Exercice 4. Cas particuliers de la formule de Stokes.

1. *Formule de Green-Riemann.* Soit D un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$ et P, Q de fonctions lisses définies au voisinage de D. Montrer que
$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D (\partial_x Q - \partial_y P) dxdy.$$

2. *Formule d'Ostrogradski.* Soit D un domaine régulier de $\mathbb{R}^3$, $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ et X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que
$$\int_{\partial D} \iota_X \omega = \int_D (\mathrm{div} X)\omega.$$
Que devient cette égalité pour $X = P\partial_x + Q\partial_y + R\partial_z$?
On définit en outre le *flux* de X à travers $S = \partial D$, noté $\int_S X$, comme
$$\int_S \langle X, N\rangle \sigma$$
où N désigne le champ normal sortant et $\sigma = \iota_N \omega$ la forme volume canonique sur S. Vérifier que
$$\iota_X \omega_{|S} = \langle X, N\rangle \sigma$$
ce qui entraîne :
$$\int_S X = \int_D (\mathrm{div} X)\omega.$$