Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques fondamentales, 2014-2015
Cours de géométrie différentielle
H. Eynard-Bontemps, A. Oancea

Examen partiel du 3 novembre 2014

Durée : 2 heures

Le clarté des explications sera appréciée. Sont autorisées les notes individuelles de cours et de TD, ainsi que le polycopié du cours.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

Questions.

1. Soient $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-variétés. Supposons que $M \subseteq N$. Montrer que $T_pM \subseteq T_pN$ pour tout $p \in M$.

2. Soit M une sous-variété d'une variété N et X un champ de vecteurs défini sur un ouvert U de N contenant M et tangent à M (i.e. tel que $X(p) \in T_pM \subset T_pN$ pour tout $p \in M$). Montrer que toute courbe intégrale passant par un point de M est entièrement contenue dans M.

3. En choisissant une définition quelconque de l'espace tangent en un point à une variété, démontrez l'identité

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$$

pour deux applications lisses $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ et un point $p \in M$.

4. Montrer que les champs $X = \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^3$ ne peuvent pas être redressés localement simultanément, i.e. qu'il n'existe pas de difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi_* X$ et $\varphi_* Y$ soient constants. *Indication : calculer le crochet de X et Y.*

5. Soit $E \to M$ un fibré vectoriel tel que toute section possède au moins un zéro. Montrer que E n'est pas trivial.

6. Est-ce que $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète et regardé comme variété de dimension 0 est à base dénombrable ?

7. Donnez un exemple d'action propre et libre du groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3$ sur une variété.

8. Montrez qu'un champ de vecteurs linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est complet.

9. Donner un exemple de champ de vecteurs dépendant du temps dont le flot ne vérifie pas la relation de groupe à un paramètre de difféomorphismes.

10. Montrer qu'une variété est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.

11. Soit M variété et $p, q \in M$ tels que $p \neq q$. Soient $v \in T_pM$ et $w \in T_qM$ fixés. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs lisse X sur M tel que $X_p = v$ et $X_q = w$.

12. Soit $f : M \to N$ un difféomorphisme et $X \in \mathcal{X}(M)$ un champ de vecteurs de flot φ_X^t. Montrer que le flot de f_*X est $f \circ \varphi_X^t \circ f^{-1}$.

13. Soient $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ avec M variété. Montrer l'identité

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0} (\varphi_X^t)^* Y = (\varphi_X^{t_0})^* L_X Y.$$

14. Soit G un groupe de Lie et notons G_0 la composante connexe de l'élément neutre. Montrer que G_0 est un sous-groupe distingué de G.

15. Décrire les courbes intégrales d'un champ de vecteurs invariant à gauche sur le groupe de Lie $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

16. Montrer que le fibré tangent à une sphère de dimension impaire admet une section qui ne s'annule en aucun point.