MM049 **2011-2012**
Université Paris 6

Équations différentielles : examen partiel

7 mars 2012

Le sujet est clairement trop long, il n'est absolument pas nécessaire de tout faire !

Exercice 1.— Dans cet exercice on ne demande pas de démonstration complète, mais simplement de justifier brièvement les réponses. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Esquisser les portraits de phase des flots associés aux matrices A, $-A$ et C.

2. Soit $B = 2A$. Les flots $\Phi^t(x) = \exp(tA)x$ et $\Psi^t(x) = \exp(tB)x$ des deux matrices A et B sont-ils linéairement conjugués ? Différentiablement conjugués ? Topologiquement conjugués ?

3. Mêmes questions pour les matrices A et $-A$.

4. Mêmes questions pour les matrices A et C

Exercice 2.— On considère une équation différentielle $x' = X(x)$, où X est définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On suppose que X est k-lipschitzienne sur U. Soit x une solution définie sur un intervalle de temps $[0, T]$, et $x_0 = x(0)$. On veut montrer que l'intervalle de définition de toute solution maximale vérifiant une condition initiale $y(0) = y_0$ assez proche de x_0 contient $[0, T]$.

1. Montrer qu'il existe un nombre $\eta > 0$ tel que l'ensemble

$$\bigcup_{t \in [0,T]} \bar{B}(x(t), \eta)$$

est inclus dans U (où $\bar{B}(x(t), \eta)$ désigne la boule fermée de centre $x(t)$ et de rayon η).

2. Soit ε un nombre strictement positif plus petit que η, et y une solution maximale vérifiant

$$\|y(0) - x_0\| < \epsilon.$$

On suppose que l'intervalle de définition I de y ne contient pas $[0, T]$. Montrer qu'il existe un réel strictement positif $t \in I$ tel que

$$\|y(t) - x(t)\| > \eta.$$

3. Sous les mêmes hypothèses, en supposant ϵ assez petit (à expliciter), montrer qu'on aboutit à une contradiction. Conclure (on redonnera le plan du raisonnement, en explicitant notamment l'ordre du choix de ε et de η).

Le dernier exercice va utiliser la fonction définie, pour tout réel x et tout $\lambda \neq 0$, par

$$\phi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(x\sqrt{\lambda}).$$

Le développement en série entière de la fonction sinus donne

$$\phi(x, \lambda) = x - \frac{1}{6}\lambda x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\lambda^n x^{2n+1} + \cdots$$

Ceci permet de voir que la fonction ϕ se prolonge en une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, qui est de classe C^∞. On admettra ce point sans justification. On notera encore ϕ le prolongement.

Exercice 3.— On considère l'équation du pendule

$$\theta'' = -\sin(\theta), \quad \theta(0) = \theta_m,$$

qui est une équation différentielle d'ordre 2.

1. Quelles sont les conditions initiales correspondant au pendule laché, à vitesse nulle, avec un écartement initial d'un angle θ_m ?

On note $t \mapsto \theta(t, \theta_m)$ la solution maximale correspondant à ces conditions initiales. Dans la suite, on cherche à comprendre comment θ dépend de la condition initiale θ_m.

2. Expliquer comment on se ramène à une équation différentielle d'ordre 1. On explicitera la façon dont la fonction $t \mapsto \theta(t, \theta_m)$ se déduit des solutions de cette équation d'ordre 1, en précisant notamment les conditions initiales utilisées.

3. Quelle est le domaine de définition de la fonction θ ?

4. On veut se ramener à des conditions initiales indépendantes de θ_m. Pour cela, on considère la solution $t \mapsto x(t, \lambda)$ de l'équation

$$x'' = -\phi(x, \lambda), \text{ avec conditions initiales } x(0) = 1, x'(0) = 0$$

où ϕ est la fonction qui a été définie juste avant l'exercice. Exprimer $\theta(t, \theta_m)$ en fonction de $x(t, \theta_m^2)$.

5. Que vaut $x(t, 0)$?

6. Que peut-on dire de la régularité de la fonction $(t, \lambda) \mapsto x(t, \lambda)$?

7. Soit

$$v(t) = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, 0).$$

Déterminer une équation différentielle vérifiée par v. Quelles sont les conditions initiales vérifiées par v ?

8. La méthode de variation de la constante permet de résoudre cette dernière équation, et donne la solution

$$v(t) = \frac{1}{16}\left(t + \frac{1}{6}\sin 2t\right)\sin t.$$

En admettant cette formule pour v, donner un développement limité à l'ordre 1 de $x(t, \lambda)$ en fonction de λ au voisinage de $\lambda = 0$.
