

TD 1 : Sous-ensembles du plan.

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, décrire les ensembles $f^{-1}([0, 1[)$ et $f^{-1}([-1, 2])$.

$$\begin{aligned}f_1 &: x \in \mathbb{R} \mapsto x^2, \\f_2 &: x \in \mathbb{R} \mapsto x, \\f_3 &: x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x).\end{aligned}$$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par $f(x, y) = x + y$.

1. Décrire les ensembles suivants géométriquement et les représenter sur un dessin.

$$f^{-1}(\{1\}), f^{-1}([0, 1]), f^{-1}([0, 1[), f^{-1}(\mathbb{R}_+).$$

2. On appelle *ligne de niveau* λ de f l'ensemble

$$L_\lambda(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \lambda\}.$$

Quelle est la nature géométrique des ligne de niveaux de f ? Décrire les ensembles ci-dessus comme des réunions de lignes de niveaux.

Exercice 3 : Décrire les lignes de niveaux λ des fonctions suivantes, en fonction de la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2, f_2(x, y) = y - x^2, f_3(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}.$$

Exercice 4 : Décrire les ensembles suivants comme des unions et intersections d'images réciproques de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ par des fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on précisera.

$$\begin{aligned}E_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2\}, \\E_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x + 2y \leq 1 \text{ et } y \geq x^2 - 1\}, \\E_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } x^2 + y^2 \geq 4\}.\end{aligned}$$

Exercice 5 : Soient A et B deux points du plan $\mathbb{R}^2$, de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) .

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB) .
2. Donner une équation paramétrique de la droite (AB) .
3. Que représente géométriquement l'ensemble $\{(1 - t) \cdot A + t \cdot B, t \in [0, 1]\}$?

Exercice 6 : On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Étant donnés deux points M et N de coordonnées respectives (x_M, y_M) et (x_N, y_N) , rappeler l'expression de la distance de M à N .
2. On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ est borné s'il existe un réel R tel que pour tout point $m \in E$, on ait $d(0, m) \leq R$. Faire un dessin représentant graphiquement cette situation.
3. Dans la définition ci-dessus, le choix de la distance à l'origine a-t-il une importance ?
4. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont bornés/non-bornés ? (Représenter ces ensembles sur un graphique)

$$E_1 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\},$$

$$E_3 = \text{le disque de centre } (1, 0) \text{ et de rayon } 1,$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, y \leq e^{-x}\}.$$

TD 2 : Normes

Exercice 1 : Exemples et contre-exemples de normes

Parmi les applications $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies ci-dessous, lesquelles sont des normes ?

$$N(x, y) = |x|^2 + |y| \quad N(x, y) = \sup(|x|, |y|^3) \quad N(x, y) = \sqrt{(25x^2 + 4y^2)}$$

$$N(x, y) = \max(x, y) \quad N(x, y) = \min(|x|, |y|) \quad N(x, y) = 5|x| + 2|y|$$

$$N(x, y) = |x + y| + 2|y| \quad N(x, y) = \max(x^2, y^2) \quad N(x, y) = |x|$$

Exercice 2 : Étude de la norme 2 sur $\mathbb{R}^n$ - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $n > 0$ un entier naturel. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on considère la quantité

$$\|x\|_2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. On considère pour cela le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$, défini par

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n,$$

pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$.

1. Vérifier que $\|u\|_2^2 = \langle u, u \rangle$ pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$.
2. Vérifier rapidement que le produit scalaire est linéaire par rapport à chacune de ses variables, symétrique et défini (c'est-à-dire que $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$).
3. Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ fixés. En étudiant la fonction définie par

$$t \longrightarrow \langle x + ty, x + ty \rangle,$$

où t varie dans $\mathbb{R}$, montrer que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$. Que dire dans le cas où on a égalité ?

4. Dédurre des questions précédentes que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 : Normes et applications linéaires

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. On suppose donnée une application linéaire inversible $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que l'application $N_\varphi(v) = N(\varphi(v))$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Décrire la boule unité de N_φ .
3. Application : montrer sans calcul que $N_\varphi(x, y) = \max(|x + y|, |x - y|)$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter sa boule unité.
4. Que pensez-vous de la boule unité de la question précédente ? Montrer que $\max(|x + y|, |x - y|) = |x| + |y|$.

Exercice 4 : Convexité de la boule unité

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit B_N la boule unité ouverte de N .

1. Représenter B_N lorsque $n = 2$, dans les cas où N est $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.
2. Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Justifier que l'ensemble des vecteurs $tx + (1-t)y$, où $t \in [0, 1]$ est le segment $[x, y]$. On pourra commencer par représenter la situation pour un cas particulier dans $\mathbb{R}^2$.
3. Démontrer que B_N est convexe, c'est-à-dire que pour tous a et b dans B_N , le segment qui les relie est inclus dans B_N .
4. Que se passe-t-il pour la boule unité fermée ?
5. Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}^2$ dont la boule unité aurait la forme d'un cœur ?

Exercice 5 : Comparaison de normes

Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$, et α un réel strictement positif. On note $\overline{B}_1$ et $\overline{B}_2$ les boules fermées pour N_1 et N_2 . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\overline{B}_1(0, 1) \subset \overline{B}_2(0, \alpha)$.
2. Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on a $N_2(x) \leq \alpha N_1(x)$.

Exercice 6 : Équivalence de normes

On considère $\mathbb{R}^2$ et les trois normes

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \quad \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|).$$

On note $\overline{B}_i(O, R)$ la boule fermée de rayon R et de centre l'origine O pour la norme i .

1. Dessiner les boules $\overline{B}_\infty(O, 1)$ et $\overline{B}_1(O, 2)$.
2. À l'aide de l'exercice précédent, trouver la constante optimale $C_{1,\infty}$ telle que l'on ait $\|\cdot\|_1 \leq C_{1,\infty} \|\cdot\|_\infty$.
3. Trouver les autres constantes optimales d'équivalence de ces trois normes.

Exercice 7 : Pourquoi norme « infinie » ?

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la norme ℓ^p , $p \in [1, +\infty[$ définie par

$$\|(x, y, z)\|_p = (|x|^p + |y|^p + |z|^p)^{1/p}.$$

Montrer que $\|(x, y, z)\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \max(|x|, |y|, |z|)$.

TD 3 : Topologie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 : Convergence de suites

1. Représenter les suites suivantes dans $\mathbb{R}^2$. Lesquelles sont convergentes ?

$$\left(\frac{1}{n}, 1\right) \quad (e^{-n}, e^{-n}) \quad (1/n^2, 1/n) \quad (e^n, e^{-n})$$

$$(2n, -5n) \quad (n \cos(n\pi/4), n \sin(n\pi/4)) \quad \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}, \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

2. La suite suivante converge-t-elle ?

$$U_0 \text{ quelconque et } U_{n+1} = AU_n, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Si oui, soit ℓ sa limite. Donner une majoration simple de $N(U_n - \ell)$ en fonction de n , en prenant pour N successivement les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 2 : Exemple de changement de norme

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Soit U un ensemble ouvert pour cette norme. Justifier qu'il est également ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$. Faire un dessin. Même question avec un fermé, puis un compact.

Exercice 3 : Exemples d'ouverts et de fermés

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts, fermés, compacts ?

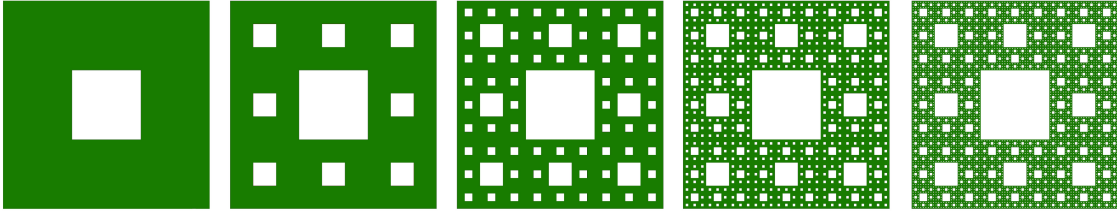
1. Le singleton $\{v\}$, où v est un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Et dans $\mathbb{R}^n$?
2. L'ensemble $\{v_1, \dots, v_k\}$, où les v_j sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Et dans $\mathbb{R}^n$?
3. La boule unité $B_N(0, 1)$ ouverte, où N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Même question avec la boule unité fermée.
4. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2\}$.
5. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < x^2\}$.
6. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -2 < y \leq x^2\}$.
7. L'ensemble de points $\{1/2^n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$.
8. L'ensemble de points $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$.
9. Les rationnels $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : La question de l'espace ambiant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$

On considère F un fermé de $\mathbb{R}$. On le plonge canoniquement dans $\mathbb{R}^2$ en considérant $\tilde{F} = F \times \{0\}$. Montrer que $\tilde{F}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Que se passe-t-il si F est un ouvert de $\mathbb{R}$?

Exercice 5 : Le tapis de Sierpinsky

On considère le carré fermé $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On lui retire le carré ouvert $]1/3, 2/3[$, puis pour chaque carrés restant, on lui retire le carré ouvert central et on continue à itérer l'opération à l'infini. On obtient un tapis de Sierpinsky qui est un ensemble fractal. Cet ensemble est-il ouvert ? Fermé ? Compact ?

**Exercice 6 : Une figure complexe**

On considère l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq 2, |x - y| > 1 \text{ et } ||y| - 3| \leq 1\}.$$

Représenter cet ensemble et dire s'il est ouvert ou fermé.

Exercice 7 : Vrai/Faux

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses

1. Si $(u_n) \subset \mathbb{R}^2$ est une suite non bornée, alors $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ pour toute norme de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$ telle que $\|(x_n, y_n)\| \rightarrow +\infty$ alors $|x_n| \rightarrow +\infty$ ou $|y_n| \rightarrow +\infty$.
3. Si un ensemble n'est pas ouvert, alors il est fermé.
4. Un ensemble peut être ouvert et fermé en même temps.
5. Le complémentaire d'un ouvert est un fermé.
6. L'intersection quelconque d'ouverts est un ouvert.
7. L'intersection quelconque de fermés est un fermé.
8. Une union finie de compacts est un compact.
9. Un ouvert de $\mathbb{R}$ contient forcément un intervalle fermé $[a, b]$ avec $b > a$.
10. Si F et F' sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$, la somme

$$F + F' = \{v \in \mathbb{R}^2, v = f + f' \text{ avec } f \in F, f' \in F'\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

TD 4 : Continuité et topologie

Exercice 1 : Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, définie par $f(x, y) = (2x + y, 2y + x)$.

1. Justifier que pour tout vecteur $u = (x, y)$, on a $\|f(u)\|_1 \leq 3\|u\|_1$.
2. Montrer que f est continue en $(0, 0)$, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, définie par $f(x, y) = (x - y, x + 2y)$. Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Justifier qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout u dans S , on ait $\|f(u)\|_\infty \leq C$. On pourra raisonner graphiquement pour trouver un tel C .
2. En déduire que pour tout vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$, on a $\|f(u)\|_\infty \leq C\|u\|_\infty$.
3. Montrer que f est continue en $(0, 0)$, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, notée $\|\cdot\|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On note $(e_i)_{i=1..n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, un vecteur, qu'on écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $x_i \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\|f(x)\| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| \cdot \|f(e_i)\|)$$

2. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq C\|x\|_1$.
3. En déduire qu'il existe $C' > 0$ tel que $\|f(x)\| \leq C'\|x\|$.
4. En déduire que f est continue pour la norme $\|\cdot\|$ choisie au départ. La continuité de f dépend-elle de la norme choisie ?

Exercice 4 : Peut-on prolonger par continuité en 0 les fonctions définies de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par les formules suivantes.

$$f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|} \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin(y) \quad f(x, y) = \frac{x^2}{|y| + x^2} \quad f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{|x| + |y|}.$$

Exercice 5 : Soit N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$, et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Ecrire la définition de « f est k -lipschitzienne pour N_1 ». Montrer que si f est k -lipschitzienne pour N_1 , il existe k' , tel que f est k' -lipschitzienne pour N_2 .
2. Ecrire la définition de « f est uniformément continue pour N_1 ». Montrer que si f est uniformément continue pour N_1 , elle l'est aussi pour N_2 .

Exercice 6 : Soit $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction K -lipschitzienne sur $[0, 1]$ et sur $[1, 2]$. Montrer que f est K -lipschitzienne sur $[0, 2]$.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique et continue. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 8 : Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : F \rightarrow F$ une fonction continue. On appelle *point fixe* de f un point $x \in F$ tel que $f(x) = x$.

1. Soit $F = [0, 1]$, montrer que f a un point fixe.
2. Si $F = [0, 1[$, f a-t-elle forcément un point fixe ?
3. Que dire si $F = [0, 1] \cup [2, 3]$?
4. On se place dans $F = \mathbb{R}^2$, trouver un exemple de fonction sans point fixe. Idem pour F un compact de $\mathbb{R}^2$ qui est « en un seul morceau ».

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est *coercive*, c'est-à-dire que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$.

1. Montrer qu'un ensemble de niveau $N_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Est-ce forcément une « ligne » de niveau ?
2. Montrer qu'un ensemble de sous-niveau $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) \leq \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que f est minorée et atteint son minimum.

Exercice 10 : Vrai/Faux Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. L'image d'un fermé de $\mathbb{R}^n$ par f est fermé.
2. L'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ par f est ouverte.
3. L'image réciproque d'une boule ouverte de $\mathbb{R}^m$ est une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$.
4. L'image réciproque d'un compact de $\mathbb{R}^m$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
5. L'image d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^m$.
6. Soit B une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ et $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue sur B . Alors $f(B)$ est bornée.

TD 5 : Dérivées partielles, différentielle.

Exercice 1 : Ensemble de définition, Dérivées partielles

Pour les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes, trouver et représenter dans $\mathbb{R}^2$ le domaine de définition, puis calculer les dérivées partielles premières lorsqu'elles existent.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3 + x^2 \sin(xy), & f(x, y) &= x^4 e^y, & f(x, y) &= \ln(1 - \|(x, y)\|_2^2), \\ f(x, y) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right), & f(x, y) &= \sqrt{x - y^2}, & f(x, y) &= \ln(\sin(x - y)). \end{aligned}$$

Exercice 2 : Dérivées directionnelles I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = y^2/x$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$.

1. Soit θ un réel fixé. Que représente géométriquement la fonction $g_\theta(r) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$?
2. Montrer que pour tout réel θ , la fonction g_θ est dérivable en 0.
3. Montrer que pourtant, f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 3 : Dérivées directionnelles II

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x \cos y + y e^x$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit $\vec{u}_\theta$ le vecteur de coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$. Calculer la dérivée directionnelle de f en $(0, 0)$ dans la direction de $\vec{u}_\theta$. Pour quelle valeur de θ est-elle maximale ? Interpréter cette information sur le graphe de f .

Exercice 4 : Matrice Jacobienne

Calculer la matrice jacobienne en tout point de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ suivante et exprimer la différentielle $df_{(1,1)}$:

$$f(x, y) = (\sin(xy), x e^{-(x^2+y^2)}) .$$

Exercice 5 : Dérivées partielles secondes I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, mais pas de classe C^2 .

Exercice 6 : Dérivées partielles secondes II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f .
2. Etudier l'existence et la valeur de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent en $(0, 0)$ mais n'ont pas la même valeur. Quelle est la classe de f ?

Exercice 7 : Extrema I

Trouver les points critiques sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy, \quad f(x, y) = xe^y + ye^x$$

Discuter leur nature.

Exercice 8 : Extrema II

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

1. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $g_k(x)$ définie par $g_k(x) = f(x, kx)$ admet un minimum local en 0.
2. La fonction f admet-elle un minimum local en $(0, 0)$?

Exercice 9 : Divergence et rotationnel

Un champ de vecteurs différentiable sur $\mathbb{R}^2$ est la donnée d'une fonction dérivable

$$V : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto V(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y)) \in \mathbb{R}^2.$$

La divergence et le rotationnel d'un champ V sont donnés par

$$\operatorname{div}(V) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}(V) = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}.$$

Calculer la divergence et le rotationnel des champs de vecteurs suivants. Dessiner les champs de vecteurs et interpréter les résultats.

$$V(x, y) = (x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (\text{champ divergent})$$

$$V(x, y) = (-y, x) \quad (\text{tourbillon}) \quad V(x, y) = (1, \cos x) \quad (\text{transport parallèle})$$

TD 6 : Exemples.

Exercice 1 : Une norme sur $M_n(\mathbb{R})$. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n . On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque notée $\|\cdot\|$, on note S la sphère unité de $\|\cdot\|$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $\mathcal{N}_{\|\cdot\|}(A) = \max_{x \in S} \|Ax\|$. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $M_n(\mathbb{R})$. On appelle cette norme la norme *subordonnée* à $\|\cdot\|$.
2. Montrer que l'on a de plus $\mathcal{N}(AB) \leq \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$.
3. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ sur $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ n'est pas une norme subordonnée. On pourra considérer la matrice dont tous les coefficients valent 1, et son carré.
4. Exprimer $\mathcal{N}_{\|\cdot\|}(A)$ en fonction des coefficients de A dans le cas où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 : Un espace de fonctions. On considère $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.
2. En considérant la famille de fonctions $(x \mapsto x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que E est de dimension infinie.
3. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} (|f(x)|)$.
 - (a) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E .
 - (b) Quelle est la boule unité, la sphère unité de $\|\cdot\|_\infty$?
 - (c) Pour f dans E , écrire avec des quantificateurs que $g \in B_{\|\cdot\|_\infty}(f, \varepsilon)$. Représenter schématiquement les graphes de f et g .
 - (d) Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de E telle que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$. Justifier l'expression : f_n converge uniformément vers f .
4. Pour toute fonction $f \in E$, on pose maintenant $\|f\|_1 = \int_0^1 (|f(t)|) dt$. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E .
5. En considérant la suite de fonctions $(x \mapsto x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
6. Montrer que l'application $f \in E \mapsto f(0)$ est linéaire, continue pour E muni de $\|\cdot\|_\infty$, mais pas pour E muni de $\|\cdot\|_1$.

Exercice 3 : Continuité du déterminant.

1. Montrer que l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
2. Soit $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n . Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert.
3. Soit (M_k) une suite convergente de matrices telles que pour tout k , il existe un vecteur x_k tel que $M_k x_k = 0$. Montrer que la limite de la suite (M_k) n'est pas inversible.
4. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé.

Exercice 4 : Compacité de $O_n(\mathbb{R})$. On définit le groupe orthogonal

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}); {}^tMM = I_n\}.$$

1. Montrer que l'application $M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tMM \in M_n(\mathbb{R})$ est continue (on précisera la norme considérée sur $M_n(\mathbb{R})$).
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que si C_i , $i = 1, \dots, n$, désignent les colonnes d'une matrice M de $O_n(\mathbb{R})$, $\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker, valant 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$).
4. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est borné, pour une norme de votre choix.
5. Conclure quant au titre de l'exercice.

Exercice 5 : Différentiabilité du déterminant

On se place dans $M_n(\mathbb{R})$, et pour tout couple (k, l) d'entiers inférieurs à n , on note $E_{k,l}$ la matrice qui a tous ses coefficients nuls, sauf son coefficient (k, l) , qui vaut 1. Autrement dit, $E_{k,l} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ (symbole de Kronecker).

1. Montrer que $(E_{1,1}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{2,n}, \dots, E_{n,n})$ forme une base de $M_n(\mathbb{R})$. On note $(x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, x_{2,1}, \dots, x_{2,n}, \dots, x_{n,n})$ les coordonnées dans cette base.
2. Pour tout (k, l) , déterminer

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\det(I_n + tE_{k,l}) - \det(I_n))}{t}.$$

En déduire les dérivées partielles de l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ au point I_n de $M_n(\mathbb{R})$.

3. Étant donné $H \in M_n(\mathbb{R})$, que vaut la différentielle de $\det$ en I_n appliquée à H , $D \det_{I_n}(H)$?

Exercice 6 : Première utilisation de la définition abstraite de différentiabilité. Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leq \|x\|^2$. Montrer que f est différentiable en 0 et donner sa différentielle.

Exercice 7 : Différentiabilité de la norme. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas différentiable en 0 (*indication* : penser aux dérivées directionnelles).
2. Si $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne, montrer que $\|\cdot\|^2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en tout point, que $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en tout point sauf 0, et exprimer leur différentielle en termes du produit scalaire sur E .
3. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ où $\|\cdot\|$ est différentiable pour $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.