MM049 **2011-2012**
Université Paris 6

Équations différentielles linéaires à coefficients constants (EDLCC)

Exercice 1. Forme générale des groupes à un paramètres de transformations linéaires

Définition. Un *groupe à un paramètre de transformations linéaires* de $\mathbb{R}^n$ est un morphisme de groupe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans l'espace $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ inversibles.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $t \mapsto e^{tA}$ définit un groupe à un paramètre de transformations linéaires de $\mathbb{R}^n$.
2. Réciproquement, montrer que tout groupe à un paramètre de transformations linéaires de $\mathbb{R}^n$ est de cette forme.

Exercice 2. Nouvelle définition de l'exponentielle et méthode des lignes brisées d'Euler. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Justifier l'égalité $\quad e^A - \left(I + \frac{A}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{\binom{m}{k}}{m^k}\right) A^k$, où, par convention, $\binom{m}{k} = 0$ pour tout $k > m$.
2. Notons $\|.\|$ la norme d'opérateur sur $M_n(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne (par exemple) sur $\mathbb{R}^n$, et posons $a = \|A\|$. Montrer que :
$$\left\| e^A - \left(I + \frac{A}{m}\right)^m \right\| \leq e^a - \left(1 + \frac{a}{m}\right)^m.$$
En déduire que
$$e^A = \lim_{m\to\infty} \left(I + \frac{A}{m}\right)^m.$$

Nous allons interpréter ce résultat en terme de *convergence de la méthode d'Euler*. Ce procédé vise à obtenir la solution d'une équation différentielle, pour une condition initiale x_0 donnée, comme limite de solutions “approchées”. Dans le cas particulier d'une équation différentielle linéaire autonome $x'(t) = A.x(t)$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, le principe est le suivant. On connaît le vecteur vitesse de la solution au point $x_0 = x(0)$: c'est $A.x_0$. On se déplace à vitesse constante $A.x_0$ à partir de x_0 pendant un intervalle de temps $\Delta t = t/N$, $N \in \mathbb{N}^*$. On arrive au point $x_1 = x_0 + \Delta t(A.x_0)$. Pendant l'intervalle de temps suivant (de longueur Δt), on se déplace à la vitesse Ax_1, etc. On note $X_N(t)$ le dernier point x_N. La trajectoire que nous venons de définir de x_0 à x_N est une ligne brisée (dite *ligne brisée d'Euler*). On s'attend naturellement à ce que, quand N tend vers $+\infty$, c'est-à-dire quand le *pas de temps* tend vers 0, la suite de lignes brisées d'Euler tende vers une courbe intégrale de l'équation, de sorte que l'extrémité $X_N(t)$ approche la valeur au temps t de la solution x de l'équation $x' = Ax$, de condition initiale $x(0) = x_0$.

3. Calculer explicitement $X_N(t)$ (en fonction de x_0, N, t et A) et montrer à l'aide de la question précédente qu'on a bien $\lim_{N\to\infty} X_N(t) = x(t)$.

Exercice 3. De l'ordre n à l'ordre 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, ..., a_n$ des réels, avec $a_n \neq 0$. Expliciter une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(x_0, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et toute application n fois dérivable $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les assertions suivantes soient équivalentes :

(i) x est solution de

$$\begin{cases} a_n x^{(n)}(t) + ... + a_0 x(t) = 0 \\ x(t_0) = x_0, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

(ii) $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est l'unique solution de : $\quad X'(t) = A.X(t),\ X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Un exemple de selle. On considère le système d'équations

$$(*) \qquad \begin{cases} x' &= y \\ y' &= 2x - y \end{cases}$$

1. Écrire ce système sous la forme $X' = A.X$, avec $A \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, avec D diagonale.
2. Donner l'ensemble des solutions de $Y' = D.Y$ $(**)$, et en déduire celles de $(*)$.
3. Comment obtenir le portrait de phase de $(*)$ à partir de celui de $(**)$? Esquisser ces deux portraits de phase.

Exercice 5. EDLCC autonome du second ordre. L'écart à l'équilibre $x(t)$ d'un chariot de masse m relié à un point du plan par un ressort de raideur k vérifie l'équation différentielle suivante :

$$mx'' + \mu x' + kx = 0, \qquad (1)$$

où μ modélise les frottements du chariot sur le plan. À $t = 0$, le système se trouve à une distance x_0 de l'origine (position d'équilibre) et sa vitesse $x'(0)$ est supposée nulle. On posera pour simplifier

$$\alpha = \frac{\mu}{2m} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

1. Écrire l'équation différentielle du second ordre (1) sous la forme d'un système de deux équations du premier ordre de la forme :

   $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

   où $A \in M_2(\mathbb{R})$ et x_1, x_2 sont deux fonctions que l'on exprimera en fonction de x.
2. Déterminer en fonction de α et ω_0 les valeurs propres et sous-espaces propres complexes de A.
3. Quel est (intuitivement) le mouvement du chariot dans chacune des situations suivantes :
   (a) pas de frottement : $\alpha = 0$;
   (b) frottements faibles : $\alpha^2 < \omega_0^2$;
   (c) frottements importants : $\alpha^2 \geq \omega_0^2$.

4. Esquisser, dans chaque cas, l'allure du portrait de phase du système (2). On fera notamment apparaître les éventuels sous-espaces propres réels de A. Pour le (c), on distinguera les cas $\alpha^2 > \omega_0^2$ et $\alpha^2 = \omega_0^2$.
5. Dans chacun des cas, déterminer la solution $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ de (2) ayant pour condition initiale $(x_0, 0)$. Comparer avec le comportement prévu en 3.
6. Dans le cas (a), montrer que la courbe paramétrique $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ est une ellipse.

Exercice 6. Champs de vecteurs hyperboliques dans $\mathbb{R}^3$. Combien y a-t-il de classes de conjugaison topologique de champs de vecteurs hyperboliques dans $\mathbb{R}^3$? Pouvez-vous esquisser le portrait de phase d'un représentant de chaque classe ?

Exercice 7. Exponentielle de matrices non diagonalisables. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer e^{tA} pour

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ & & a & b \\ \multicolumn{2}{c}{0} & -b & a \end{pmatrix}.$$