Université Pierre et Marie Curie **2012-2013**
M1 – MM049

Barrières et explosion

Exercice 1. Preuve du théorème sur l'"explosion". On considère une équation différentielle de la forme
$$y' = \phi(x, y) \tag{$*$}$$
avec ϕ définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit f une solution de $(*)$, définie sur un intervalle $]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b < +\infty$. Supposons que f admet une limite *finie* en b^-. Montrer que f se prolonge alors en une solution $\tilde{f}$ de $(*)$ définie sur un intervalle strictement plus grand que $]a, b[$.

   Ainsi, par contraposée, si f est supposée maximale*, d'intervalle de vie $]a, b[$ avec b* réel*, elle ne peut admettre une limite finie en b^-.*

2. *Digression sur les valeurs d'adhérence de fonctions à valeurs réelles.* Ici, f désigne simplement une fonction d'un intervalle ouvert $]a, b[\subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il n'est plus question d'équation différentielle).
   (a) Rappeler la définition de valeur d'adhérence de f en b^-.
   (b) *(facultatif)* Vérifier que, si $(b_n)_n$ désigne une suite croissante d'éléments de $]a, b[$ tendant vers b, l'ensemble Ω des valeurs d'adhérence de f en b^- est
   $$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f([b_n, b[)}.$$
   (c) *(facultatif)* Montrer que, si f est *continue* sur $]a, b[$, Ω est un intervalle fermé (éventuellement vide).

   Dans les questions suivantes, f est supposée continue.

   (d) Montrer que Ω est vide si et seulement si f admet une asymptote verticale en b^-.
   (e) Montrer que Ω est réduit à un singleton si et seulement si f admet une limite finie en b^-.

3. On revient à la preuve du théorème sur l'explosion. On raisonne par l'absurde. On suppose que f est une solution maximale de $(*)$, d'intervalle de vie $]a, b[$, avec b *réel*, et que f n'admet pas d'asymptote verticale en b^-. D'après la question 1, elle n'admet pas non plus de limite finie en b^- (sinon elle n'est pas *maximale*). D'après la question 2, elle admet donc en b^- au moins deux valeurs d'adhérence distinctes $\alpha < \beta$. L'idée est que ceci force f à osciller beaucoup au voisinage de b, et donc sa dérivée à prendre des valeurs arbitrairement grandes, ce qui s'avère incompatible avec l'égalité $f'(x) = \phi(x, f(x))$, ϕ étant continue et donc bornée sur tout compact du plan.
   Mettons maintenant tout ceci en forme. Soient $\alpha' < \beta'$ deux réels compris strictement entre α et β.
   (a) Montrer que le graphe de f coupe les droites horizontales d'ordonnées α' et β' en une infinité de points d'abscisses arbitrairement proches de b.
   (b) En déduire l'existence d'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $]a, b[$ tendant vers b et satisfaisant
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha' \leq f(x_n) \leq \beta' \quad \text{et} \quad |f'(x_n)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
   (c) Aboutir à une contradiction.

Exercice 2. Barrières horizontales et non-explosion des solutions. On considère l'équation différentielle
$$y' = \cos(y) + \frac{1}{2}\sin(x)$$
dont le champ de tangentes est représenté sur le dessin.

1. À l'aide du dessin, trouver quelques droites horizontales qui sont des barrières montantes. Vérifier par le calcul. Même question pour des barrières descendantes.
2. Soit f la solution vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$. Montrer qu'elle est bornée et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que toute solution est bornée et définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Non-explosion des solutions. On considère l'équation différentielle
$$y' = y^2 - x.$$

1. Déterminer les trois régions du plan où le champ de tangentes a une pente nulle, positive, négative.
2. Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de la région où la pente du champ est négative, et f la solution vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$, c'est-à-dire dont le graphe passe par le point M_0. Montrer que f est définie (au moins) sur $[x_0, +\infty[$.

Exercice 4. Barrières et limite en $+\infty$ des solutions. On considère l'équation différentielle
$$(1) \qquad y' = -y - \frac{y}{x}$$
sur l'intervalle $x \in]0, +\infty[$.

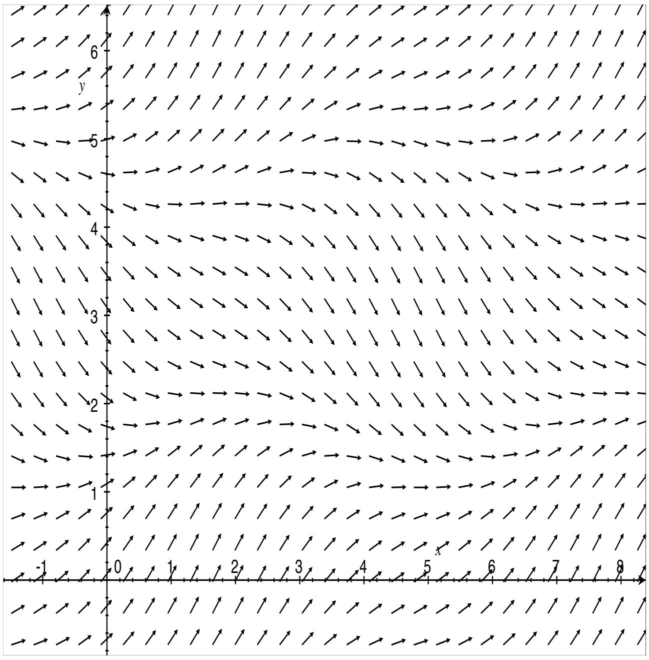
1. Montrer que, si g est une solution strictement positive de l'équation différentielle $y' = -y$, alors le graphe de g est une barrière descendante pour l'équation différentielle (1). Montrer de même que, si h est une solution strictement négative de $y' = -y$, alors le graphe de h est une barrière montante pour l'équation différentielle (1).
2. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y' = -y$?
3. Soit f la solution maximale de l'équation différentielle (1) de condition initiale $f(x_0) = y_0$. En utilisant les deux premières questions, montrer que f est définie (au moins) sur $[x_0, +\infty[$, et que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 5. Barrières et divergence des solutions. On considère l'équation différentielle
$$(1) \qquad y' = \cos(y) - x.$$

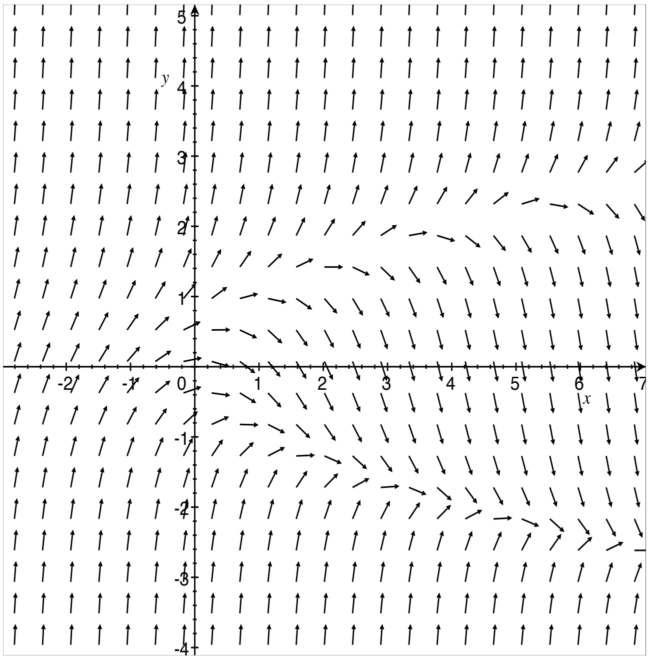
1. Soit g une solution maximale de l'équation différentielle $y' = 2 - x$. Montrer que le graphe de g est une barrière descendante pour l'équation différentielle (1).
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = 2 - x$. Quelle est la limite en $+\infty$ des solutions ?
3. Soit f une solution maximale de l'équation différentielle (1) d'intervalle de vie $I =]a, b[$ (avec a et b éventuellement infinis). En utilisant les questions précédentes, montrer que $f(x) \to -\infty$ quand $x \to b^-$ (on distinguera les cas $b < +\infty$ et $b = +\infty$).

Exercice 6. Barrières et explosion en temps fini. On considère l'équation différentielle
$$(1) \qquad y' = e^y + x.$$
Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, et soit f la solution de (1) vérifiant la condition initiale $f(1) = y_0$. On voudrait montrer que f "explose en temps fini" : l'intervalle de vie de f est du type $I =]a, b[$ avec b fini, et on a $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

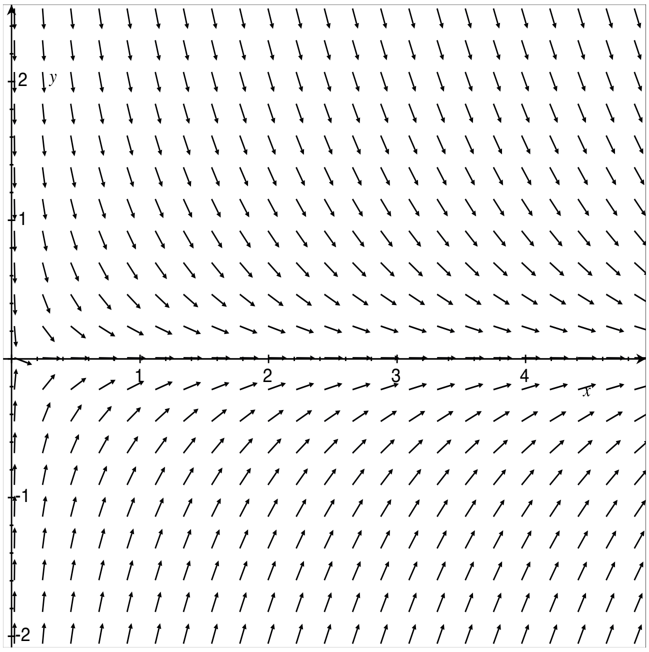
1. Déterminer la solution g de l'équation différentielle $y' = e^y$ avec la condition initiale $g(1) = y_0$. Quel est son intervalle de vie ? Tracer grossièrement son graphe.
2. Montrer qu'un morceau du graphe de g est une barrière montante pour l'équation différentielle (1). Conclure.



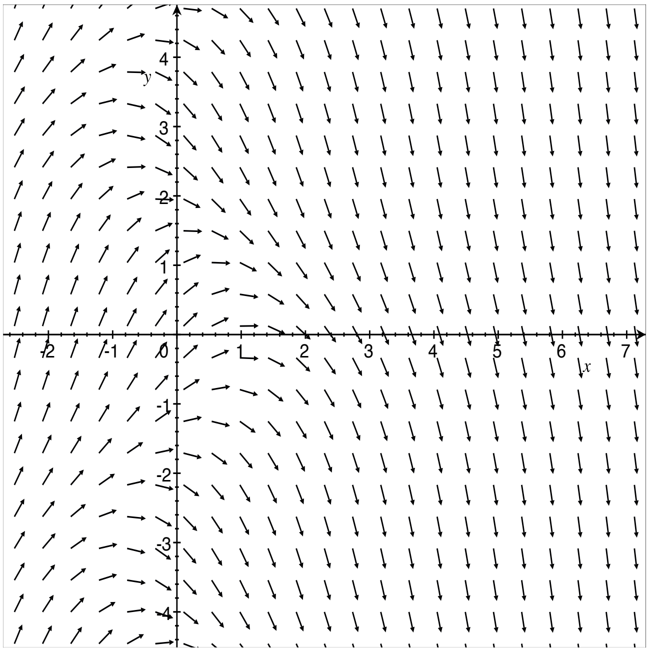
Exercice 2 : $y' = \cos(y) + \frac{1}{2}\sin(x)$



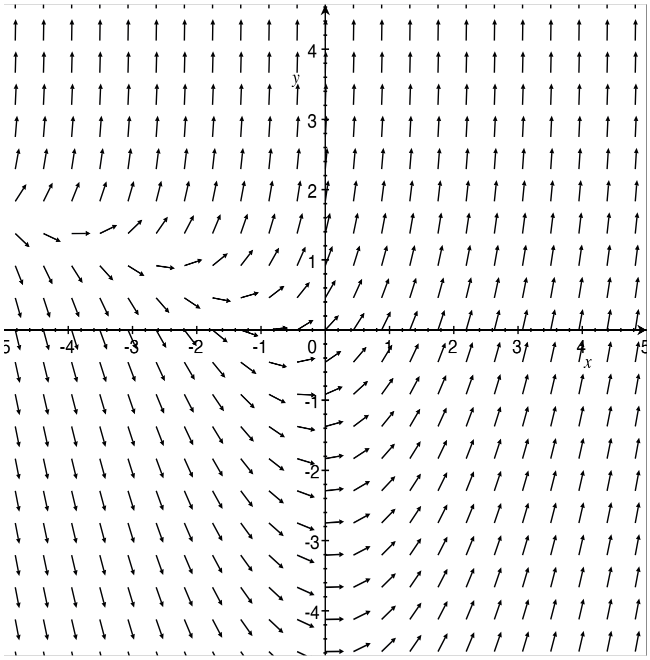
Exercice 3 : $y' = y^2 - x$



Exercice 4 : $y' = -y - \frac{y}{x}$



Exercice 5 : $y' = \cos(y) - x$



Exercice 6 : $y' = e^y + x$