UPMC | LM250
PeiP2 | 2013-2014

TD 2 : Intégrales généralisées

Exercice 1. *Calculs explicites*

Dire si elles convergent et le cas échéant, calculer la valeur des intégrales généralisées suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$,
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$,
3. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$,
4. $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$.

Exercice 2. *Récurrence*

On pose pour tout réel $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(a) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$.

1. Montrer par récurrence que les intégrales f_n convergent et établir une formule de récurrence entre $f_{n+1}(a)$ et $f_n(a)$.
2. En déduire la valeur de $f_n(a)$ pour tout n.

Exercice 3. *Nature des intégrales*

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2}dt$,
2. $\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{\sin(t)^4}dt$
3. $\int_0^1 \frac{e^t-1}{|\ln(1+t)|^{1,5}}dt$,
4. $\int_0^1 \frac{(1+t)^{3,5}-1}{\tan(t)}dt$,
5. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^3}dt$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^\alpha}dt$,
7. $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln(\cos(1/t))dt$,
8. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}dt$,
9. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+x+1}}}{\sqrt{x}}dx$,
10. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^\alpha(1+y^\beta)}dy$,
11. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$,
12. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}dx$,
13. $\int_0^{+\infty} \frac{(1+s)^\alpha-s^\alpha}{s^\beta}ds$,
14. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(\ln(t))^\beta(\ln(\ln(t)))^\gamma}$,
15. $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$.

Exercice 4. *Fonction périodique / t*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, T périodique. Montrer que l'intégrale $\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ converge si et seulement si $\int_0^T f(t)dt = 0$.

Exercice 5. *Décroissance et intégrabilité*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante et intégrable en $+\infty$. Montrer que $f(x) = o_{+\infty}(1/x)$.