M2 Enseignement – CAPES **2011-2012**
Université Paris 6

Équations différentielles affines à coefficients variables

Exercice 1. Sturm-Liouville. On étudie les équations du type

$$u'' + P(x)u' + Q(x)u = 0 \tag{1}$$

ou, de manière équivalente (comme on le verra dans la suite), du type

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

avec P, Q, $q : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions C^∞.

1) Généralités

1. Si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1), on définit le Wronskien

$$W(u_1, u_2) = u_1 u_2' - u_1' u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

   Montrer que u_1 et u_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si le Wronskien ne s'annule pas. On pourra commencer par remarquer que $\binom{u_1}{u_1'}$ et $\binom{u_2}{u_2'}$ sont solutions d'une équation de la forme $U' = A(x)U$ avec $A : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$.
2. En déduire que deux solutions indépendantes ne peuvent avoir de zéro commun.
3. Montrer que pour résoudre une équation du type (1), on peut toujours se ramener à une équation du type (2). Pour cela, déterminer des fonctions φ et q telles que

$$\varphi y \text{ est solution de (1)} \quad \Leftrightarrow \quad y \text{ est solution de (2).}$$

2) Cas Particuliers

Quelles sont les solutions dans le cas où $q \equiv -a^2$, $a \in \mathbb{R}$, ayant pour conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 1$ et $y(0) = 1, y'(0) = 0$?
Remarque. On peut retrouver de nombreuses propriétés qualitatives de sin et cos en les définissant seulement comme les solutions de $y'' + y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 1$ et $y(0) = 1, y'(0) = 0$. (cf. exercice 2)

3) Oscillations

1. Montrer que toute solution de (2) non identiquement nulle admet un nombre fini de zéros sur tout intervalle compact.
2. On suppose $q < 0$. Montrer que toute solution non identiquement nulle de (2) a au plus un zéro.
3. On suppose $\mathbb{R}_+ \subset I$, $q > 0$ et $\int_0^{+\infty} q(x)dx = +\infty$. Montrer que toute solution de (2) a une infinité de zéros.
4. Soient y_1 et y_2 des solutions linéairement indépendantes de (2). Montrer qu'entre deux zéros successifs de y_1 il y a exactement un zéro de y_2.

4) Comparaison des oscillations

1. Soit y une solution de $y'' + q(x)y = 0$ et z une solution de $z'' + r(x)z = 0$ avec $q, r : I \to \mathbb{R}$, $q > r$. Montrer que y s'annule au moins une fois entre deux zéros successifs de z. On pourra poser $W = yz' - y'z$ et étudier ses variations entre deux zéros consécutifs de z.
2. On suppose qu'il existe m et M dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $m^2 < q(x) < M^2$ pour tout $x \in I$. Montrer que deux zéros successifs x_1 et x_2 vérifient
$$\frac{\pi}{M} < |x_2 - x_1| < \frac{\pi}{m}.$$
3. Exemple : Équation de Bessel [1]. Soit u une solution de l'équation de Bessel
$$x^2u'' + xu' + (x^2 - p^2)u = 0, \quad p \in \mathbb{R}_+.$$
Montrer que la forme réduite de l'équation est
$$y'' + \left(1 + \frac{1-4p^2}{4x^2}\right) y = 0.$$
À l'aide du résultat de comparaison ci-dessus, montrer que :
– si $0 \leq p < \frac{1}{2}$, tout intervalle de longueur π contient au moins un zéro de u ;
– si $p = \frac{1}{2}$, les zéros de u sont espacés de π ;
– si $p > \frac{1}{2}$, tout intervalle de longueur π contient au plus un zéro de u.

5) Modes propres

1. On suppose maintenant $q : [a, b] \to \mathbb{R}$, $q > 0$, et on s'intéresse aux solutions de l'équation
$$y'' + \lambda q(x)y = 0, \tag{3}$$
où λ est un paramètre réel. Soit y_λ la solution vérifiant $y_\lambda(a) = 0$, $y'_\lambda(a) = 1$.
Montrer l'existence d'une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ strictement croissante et tendant vers $+\infty$ telle que $y_\lambda(b) = 0$ si et seulement si $\lambda \in \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que y_{λ_n} a exactement $n-1$ zéros dans $]a, b[$. On pourra remarquer la dépendance continue du n-ième zéro de y_λ par rapport à λ.
2. Soient $p, q : [a, b] \to \mathbb{R}$, $p, q > 0$, p de classe C^1 et q continue. On considère le problème aux limites
$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \lambda q(x)y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0.$$
Utiliser le changement de variable $w(x) = \int_a^x \frac{dt}{p(t)}$ pour trouver une équation équivalente de la forme (3) et montrer que les paramètres pour lesquels on a une solution non-triviale constituent une suite strictement croissante $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, tendant vers $+\infty$. La solution non-triviale y_n correspondant à chaque λ_n est unique à une constante multiplicative près et a exactement $n-1$ zéros dans $]a, b[$.
Prouver la relation d'orthogonalité
$$\int_a^b q y_m y_n = 0, \quad \forall m \neq n.$$

---

1. Les équations de Bessel apparaissent naturellement lorsqu'on résoud en coordonnées polaires en séparant les variables les équations des ondes planaires :
$$a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad a > 0.$$

3. Application : l'oscillation d'une corde élastique dont les bouts sont fixés est décrite par l'équation uni-dimensionnelle des ondes :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

où m désigne la densité de masse le long de la corde. Chercher une solution y à variables séparées pour faire apparaître un problème de type (3).

Exercice 2. ***cos* et *sin* revisitées**. Le but de cet exercice est de dire le plus de choses possibles sur les solutions de l'équation $y'' + y = 0$ *en supposant ne pas connaître leur forme explicite.*

1. Soit $y = s(x)$ la solution vérifiant $s(0) = 0$ et $s'(0) = 1$. Prouver l'existence de

$$m = min\{x > 0 : s'(x) = 0\} \text{ et } p = min\{x > 0 : s(x) = 0\}$$

et prouver que $m < p$.
2. Prouver que le graphe de s au dessus du segment $[0, p]$ est symétrique par rapport à la droite $x = m$. En déduire que $m = p/2$ et $s'(p) = -1$.
3. Montrer que le graphe de s sur $[0, 2p]$ est symétrique par rapport au point $(p, 0)$. En déduire que s est périodique de période $2p$.
4. Soit $y = c(x)$ la solution vérifiant $c(0) = 1$ et $c'(0) = 0$. Montrer que $s' = c$, $c' = -s$, déduire la périodicité de c, et montrer que $c^2 + s^2 = 1$.
5. Retrouver toutes les relations trigonométriques entre s et c...

Exercice 3. Théorème de Cauchy-Lipschitz affine. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ des applications continues et $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Le problème de Cauchy :*

$$(*) \quad \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $x : I \to \mathbb{R}^n$.

I Préliminaires : Théorème de point fixe de Picard

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

Théorème (Point fixe de Picard)**.** *Soit (X, d) un espace métrique complet et F une application* contractante *de X dans lui-même, c'est-à-dire telle qu'il existe une constante positive $k < 1$ telle que, pour tout $(x, y) \in X^2$,*

$$d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y).$$

*Alors F possède un unique point fixe $a \in X$ (*i.e *un point satisfaisant $F(a) = a$) et pour tout $x_0 \in X$, la suite $(F^n(x_0) = F \circ ... \circ F(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.*

Soit $x_0 \in X$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0).$$
2. Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,
$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et conclure quant à l'existence de a.
4. Prouver l'unicité.

II Application : Théorème de Cauchy–Lipschitz affine

On reprend les notations du début de l'énoncé, et l'on suppose I compact. On note E l'espace des fonctions $t \mapsto x(t)$ continues de I dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme $\|x\|_\infty = \max_{t\in I} \|x(t)\|$ (bien définie pour tout $x \in E$ car x est continue donc *bornée* sur tout *compact*), et on admet que l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_\infty)$ est un *espace de Banach* (*i.e* que l'espace métrique (E, d_E), où d_E désigne la distance définie sur E par la norme $\|.\|_\infty$, est *complet*).

Pour $x \in E$, on définit
$$F(x) : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + B(s))ds.$$

1. Montrer que $(*)$ équivaut à : $x \in E$ et $F(x) = x$.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in I$, $\|A(t).v\| \leq C\|v\|$.
3. Soit ℓ la longueur de I. Montrer que F définit une application lipschitzienne sur E de rapport $C\ell$. Peut-on en déduire le résultat souhaité ?
4. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'application itérée $F^p = F \circ ... \circ F$ est lipschitzienne de rapport $\frac{(C\ell)^p}{p!}$.

   (On pourra montrer par récurrence que $\|F^p(y)(t) - F^p(x)(t)\| \leq \frac{(C|t-t_0|)^p}{p!}\|y - x\|_\infty$.)
5. Montrer que F admet un unique point fixe $x \in E$ et conclure.
6. Étendre le résultat à un intervalle I quelconque.