Équations différentielles linéaires (I)

(à coefficients constants)

Un peu de dimension 2

Exercice 1.— Soient A, P et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2\pi \\ 2\pi & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = PAP^{-1}.$$

1. Esquisser le portrait de phase de l'ED : $X' = AX$ dans le plan.
2. Quel est le lien entre les solutions de $X' = AX$ et celles de $Y' = BY$?
3. En déduire l'allure du portrait de phase de la seconde équation différentielle.

Exercice 2.— Discuter du comportement du ressort amorti, donné par l'EDO

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

selon les valeurs des constantes physiques m (masse), α (coefficient de frottement), k (raideur). On transformera cette EDO d'ordre 2 en une EDO d'ordre 1 en dimension deux, en posant

$$X = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix}.$$

Stabilité des équations différentielles linéaires

Dans les exercices 3 et 4, A désigne un élément de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.— (Superposition des solutions) Soit $(V_j)_{j=1,\dots,m}$ une base de $\mathbb{C}^m$. Pour chaque j, on considère la solution $X_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$ de l'équation $X' = AX$ vérifiant la condition initiale $X_j(0) = V_j$. Montrer que toute solution de l'équation est combinaison linéaire (à coefficients complexes) des X_j.

Exercice 4.— On considère à nouveau l'équation différentielle $X' = AX$. Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre généralisé pour la valeur propre λ, ce qui signifie que $V \in \mathrm{Ker}((A - \lambda \mathrm{Id})^m)$.
1. Montrer directement (sans utiliser l'exponentielle de matrice) que la solution vérifiant $X(0) = V$ est donnée par

$$X(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} t^j (A - \lambda \mathrm{Id})^j V.$$

2. Discuter du comportement asymptotique de cette solution : à quelle condition $\|X(t)\|$ tend-elle vers 0 ? Vers $+\infty$?

On revient maintenant au cadre réel. *On considère une équation différentielle linéaire $X' = AX$, avec $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. On rappelle que la fonction constante $t \mapsto 0$ est une solution de l'équation, on dit que le point 0 est un point d'équilibre. Le but de ce qui suit est de comprendre le lien entre les propriétés algébriques de la matrice A et les propriétés de stabilité de la solution nulle.*

Définition. On dira que 0 est un *équilibre stable* si toute solution $t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^m$ est bornée sur $[0, +\infty[$. On dira que c'est un *équilibre asymptotiquement stable* si de plus toute solution $t \mapsto X(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. (On dira abusivement que l'équation $X' = AX$ est stable ou asymptotiquement stable si la solution nulle est un équilibre stable ou asymptotiquement stable).

Exercice 5.— Montrer que 0 est un équilibre stable pour $X' = AX$ si et seulement si, pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 tel que toute solution X issue de V (i.e. satisfaisant $X(0) \in V$) reste dans U en temps positif (i.e. satisfait : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ X(t) \in U$).

Ceci est en fait la vraie *définition d'un équilibre stable. Les deux définitions sont équivalentes pour une équation linéaire, mais pas en général !*

Exercice 6.— Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En utilisant la classification vue en cours, discuter de la stabilité et de la stabilité asymptotique de l'équation $X' = AX$.

Exercice 7.— On considère un système $X' = AX$ avec A de taille quelconque.

1. Caractériser la stabilité asymptotique. *Aide : on utilisera le résultat de cours sur la forme des solutions.*

2. Dans un exercice précédent, nous avons étudié la solution (*complexe*) X vérifiant la condition initiale $X(0) = V$ où V est un vecteur propre généralisé. A quelle condition les solutions de ce type (pour tous les vecteurs propres généralisés de A) sont-elles toutes bornées sur $[0, +\infty[$?

3. Montrer que l'équation différentielle $X' = AX$ est stable si et seulement si toutes les solutions de ce type sont bornées sur $[0, +\infty[$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équation différentielle.

Puits et sources

On dira que la solution constante 0 est un *puits* si les parties réelles de toutes les valeurs propres de A sont < 0. Nous avons vu que dans ce cas la solution 0 est asymptotiquement stable. Le théorème suivant fait mieux.

Théorème (des puits linéaires). *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *toutes les vp de A ont une partie réelle < 0 ;*
2. *pour toute norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^m$, il existe deux constantes $a > 0$ et $C \geq 1$ telles que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et $t > 0$,*
$$\left\|e^{tA}x_0\right\| \leq Ce^{-ta} \|x_0\| \ ;$$
3. *il existe une norme euclidienne N_*, dite* norme adaptée*, et une constante $a > 0$ telles que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et $t > 0$,*
$$N_*(e^{tA}x_0) \leq e^{-ta}N_*(x_0).$$

On définit de façon analogue les *sources*, lorsque les parties réelles des valeurs propres sont toutes strictement positives, et on peut bien sûr énoncer un théorème symétrique pour les sources. (Une matrice A définit un puit si et seulement si $-A$ définit une source, ce qui permet de déduire formellement les propriétés des sources des propriétés des puits).

Exercice 8.— **1.** Quelle que soit A, montrer que (3) implique (2) et que (2) implique (1).

2. Montrer le théorème dans le cas où A est diagonale.

3. Montrer le théorème dans le cas où A est diagonalisable.

4. Donner un exemple montrant que, lorsque les trois affirmations équivalentes du théorèmes sont satisfaites, la norme euclidienne canonique n'est pas toujours une norme adaptée.