UPMC | LM250
PeiP2 | 2013-2014

TD 3 : Séries numériques

Exercice 1. *Nature et somme de*

1. $$\sum_{TG} \frac{1}{k(k+1)(k+2)},$$
2. $$\sum_{TG} \frac{1}{k^2-1},$$
3. $$\sum_{TG} \ln\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big),$$
4. $$\sum_{TG} \ln\Big(\cos\big(\frac{\alpha}{2^k}\big)\Big),$$
5. $$\sum_{TG} \arctan\Big(\frac{1}{1+k+k^2}\Big).$$

Exercice 2. *Nature de*

1. $$\sum_{TG} \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n - e,$$
2. $$\sum_{TG} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta},$$
3. $$\sum_{TG} \frac{n^2}{(1+n^2)^2},$$
4. $$\sum_{TG} \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$
5. $$\sum_{TG} \frac{n^2}{n^3+1},$$
6. $$\sum_{TG} \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n k^2}.$$

Exercice 3. *Comme pour les fonctions*

Soit u_n une suite décroissante dont la série converge, montrer que $u_n = o(1/n)$.

Exercice 4. *Nature de la série de terme général*

1. $$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n},$$
2. $$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}},$$
3. $$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right),$$
4. $$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} - 1,$$
5. $$f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a - \frac{1}{n}\right) - 2f(a),$$
   où f est C^2 au voisinage de a,
6. $$\sin(n!\pi e),$$
   on pensera à utiliser les résultats du TD1,
7. $$\frac{e^{ni\theta}}{\sqrt{n} + e^{ni\varphi}}.$$

Exercice 5. *CS*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum \frac{1}{1+n^2u_n}$ converge. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 6. *CSI*

Donner un équivalent de

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Exercice 7. *Raabe-Duhamel*

1. Soit u_n une suite à termes positifs telle que
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}).$$
   Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $u_n \sim An^{-\alpha}$. En déduire la nature de la série des u_n.
2. Étudier la série d'une suite définie par
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$