Université Pierre et Marie Curie **2012-2013**
M1 – MM049

Équations différentielles linéaires (II)

(à coefficients variables, avec second membre)

Exercice 1.— Théorème de Cauchy-Lipschitz affine. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ des applications continues et $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Le problème de Cauchy :*

$$(*) \qquad \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $x : I \to \mathbb{R}^n$.

I Préliminaires : Théorème de point fixe de Picard

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

Théorème (Point fixe de Picard)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* F *une application* contractante *de* X *dans lui-même, c'est-à-dire telle qu'il existe une constante positive* $k < 1$ *telle que, pour tout* $(x, y) \in X^2$,

$$d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors F *possède un unique point fixe* $a \in X$ *(*i.e *un point satisfaisant* $F(a) = a$*) et pour tout* $x_0 \in X$*, la suite* $(F^n(x_0) = F \circ ... \circ F(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* a.

Soit $x_0 \in X$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0).$$

2. Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

3. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et conclure quant à l'existence de a.

4. Prouver l'unicité.

II Application : Théorème de Cauchy–Lipschitz affine

On reprend les notations du début de l'énoncé, et l'on suppose I compact. On note E l'espace des fonctions $t \mapsto x(t)$ continues de I dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme $\|x\|_\infty = \max_{t \in I} \|x(t)\|$ (bien définie pour tout $x \in E$ car x est continue donc *bornée* sur tout *compact*), et on admet que l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_\infty)$ est un *espace de Banach* (*i.e* que l'espace métrique (E, d_E), où d_E désigne la distance définie sur E par la norme $\|.\|_\infty$, est *complet*).

Pour $x \in E$, on définit

$$F(x) : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + B(s))ds.$$

5. Montrer que $(*)$ équivaut à : $x \in E$ et $F(x) = x$.

6. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in I$, $\|A(t).v\| \leq C\|v\|$.

7. Soit ℓ la longueur de I. Montrer que F définit une application lipschitzienne sur E de rapport $C\ell$. Peut-on en déduire le résultat souhaité ?

8. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'application itérée $F^p = F \circ ... \circ F$ est lipschitzienne de rapport $\frac{(C\ell)^p}{p!}$. (On pourra montrer par récurrence que $\|F^p(y)(t) - F^p(x)(t)\| \leq \frac{(C|t-t_0|)^p}{p!}\|y - x\|_\infty$.)

9. Montrer que F admet un unique point fixe $x \in E$ et conclure.

10. Étendre le résultat à un intervalle I quelconque.

Exercice 2.— De l'ordre n à l'ordre 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, ..., a_n, b : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, la fonction a_n ne s'annulant pas sur I.

Expliciter des applications continues $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $(x_0, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et toute application n fois dérivable $x : J \subset I \to \mathbb{R}$, les assertions suivantes soient équivalentes :

(i) x est solution de

$$\begin{cases} a_n(t)x^{(n)}(t) + ... + a_0(t)x(t) = b(t) \\ x(t_0) = x_0, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

(ii) x est la première coordonnée de l'unique solution définie sur J de :

$$X'(t) = A(t).X(t) + B(t),\ X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

En déduire la structure de l'espace total des solutions définies sur I de l'équation :

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + ... + a_0(t)x(t) = b(t).$$

Exercice 3.— Esquisser le portrait de phase de l'équation $X' = AX$ pour chacune des matrices A suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.— On considère une équation différentielle $X' = AX$, avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour chacune des matrices A suivantes, dire si l'on a affaire à un noeud (attractif, répulsif, propre, improre), un foyer (attractif, répulsif), un centre, une selle...

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.— Pour chacune des matrices A suivantes, déterminer la solution de l'équation $X' = AX$ valant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $t = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.— Déterminer l'ensemble des solutions de :

$$(E) \quad \begin{cases} x' &= & y \\ y' &= & 2x - y + e^t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (E') \quad x'' + 4x = \tan t, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Déterminer la solution de (E) (resp. (E')) satisfaisant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (resp. $x(0) = x'(0) = 0$).