Classification topologique des automorphismes hyperboliques de $\mathbb{R}^n$
Correction

Introduction

I "Baby case" : cas $n = 1$

II Lien avec les flots contractants

1. M est trigonalisable dans $\mathbb{C}$: il existe $T \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PTP^{-1}$. On a alors $A = \exp(M) = \exp(PTP^{-1}) = P\exp(T)P^{-1}$ (cf. cours). En outre, $\exp(T)$ est aussi triangulaire supérieure et si T a pour diagonale $(\lambda_1 ... \lambda_n)$, $\exp(T)$ a pour diagonale $(e^{\lambda_1} ... e^{\lambda_n})$.

Ainsi, les valeurs propres de A, semblable à $\exp(T)$, sont les e^{λ_i}, où les λ_i sont aussi les valeurs propres de M puisque M est semblable à T.

2. L_A et L_B sont supposées contractantes, ce qui signifie que les valeurs propres de A et B sont de module strictement inférieur à 1. Or d'après la question précédentes, les v.p. de A (resp. B) sont les e^λ, avec λ v.p. de M (resp. N). Les v.p. λ de M et N vérifient donc $|e^\lambda| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)} < 1$, soit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, et a fortiori $\neq 0$, ce qui signifie que les champs de vecteurs linéaire $x \mapsto Mx$ et $x \mapsto Nx$ sont hyperboliques au sens du cours.

3. D'après le cours, les flots des champs de vecteurs $x \mapsto Mx$ et $x \mapsto Nx$ sont topologiquement conjugués : il existe un homéomorphisme H de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$H(e^{tM}x) = e^{tN}H(x).$$

En particulier, pour $t = 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad H(Ax) = BH(x), \quad \text{i.e.} \quad H(L_A(x)) = L_B(H(x))$$

ou encore

$$L_A = H^{-1} \circ L_B \circ H.$$

4. Il suffit de prendre une matrice 1×1 dont l'unique coefficient est strictement négatif, et ne peut donc pas être l'exponentielle d'un nombre réel !

Cette dernière question montre que la classification des isomorphismes hyperboliques de $\mathbb{R}^n$ *ne se réduit pas* à celle des champs de vecteurs linéaires hyperboliques.

III Isomorphismes contractants diagonalisables

1. Soient H_p et H_q des homéomorphismes de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement tels que

$$L_{A_p} = H_p^{-1} \circ L_{B_p} \circ H_p \quad \text{et} \quad L_{A_q} = H_q^{-1} \circ L_{B_q} \circ H_q$$

et définissons les applications

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x,y) & \mapsto & (H_p(x), H_q(y)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} K: & \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x,y) & \mapsto & (H_p^{-1}(x), H_q^{-1}(y)). \end{array}$$

Ces applications sont continues car H_p, H_q, H_p^{-1} et H_q^{-1} le sont, par hypothèse. En outre, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$,

$$H \circ K(x,y) = H(H_p^{-1}(x), H_q^{-1}(y)) = (H_p(H_p^{-1}(x)), H_q(H_q^{-1}(y))) = (x,y)$$

$$\text{i.e} \quad H \circ K = \mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{et de même} \quad K \circ H = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$

H est donc une bijection continue de $\mathbb{R}^n$, d'inverse continue, c'est-à-dire un homéomorphisme, qui satisfait en outre, pour tout $z = (x,y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$:

$$\begin{aligned} H^{-1} \circ L_B \circ H(z) &= K \circ L_B(H_p(x), H_q(y)) \\ &= K(B_p.H_p(x), B_q.H_q(y)) \\ &= (H_p^{-1}(B_p.H_p(x)), H_q^{-1}(B_q.H_q(y))) \\ &= (H_p^{-1} \circ L_{B_p} \circ H_p(x), H_q^{-1} \circ L_{B_q} \circ H_q(y)) \\ &= (L_{A_p}(x), L_{A_q}(y)) = L_A(z). \end{aligned}$$

L_A et L_B sont donc bien topologiquement conjugués. Ce résultat se généralise naturellement, par récurrence sur le nombre de blocs diagonaux, aux matrices diagonales par blocs avec m blocs diagonaux.

2. Soient A et B deux matrices diagonalisables dont toutes les valeurs propres sont comprises entre 0 et 1 strictement (en particulier réelles). L'énoncé ne le précisait pas mais cela signifie que A et B sont diagonalisables *dans* $\mathbb{R}$: il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D_A, D_B \in M_n(\mathbb{R})$ diagonales telles que $A = PD_AP^{-1}$ et $B = QD_BQ^{-1}$, ou encore :

$$L_A = L_P \circ L_{D_A} \circ (L_P)^{-1} \quad \text{et} \quad L_B = L_Q \circ L_{D_B} \circ (L_Q)^{-1}.$$

L_P et L_Q étant des isomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^n$, donc en particulier des homéomorphismes, ceci montre que L_A est topologiquement conjugué à L_{D_A} et L_B à L_{D_B}. La conjugaison topologique étant une relation d'équivalence, il nous suffit donc de prouver que L_{D_A} et L_{D_B} sont topologiquement conjuguées. Or D_A et D_B sont diagonales par blocs de taille 1×1 ! Les blocs sont les coefficients de la diagonale, des réels $\lambda_1 ... \lambda_n$ pour D_A et $\mu_1 ... \mu_n$ pour D_B, compris strictement entre 0 et 1.

Il suffit donc, d'après la question précédente, de vérifier que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est topologiquement conjugué à $\mu_i \mathrm{Id}$, ce qui découle du I.1. L_A et L_B sont donc bien topologiquement conjugués.

On peut également déduire ce résultat du II en remarquant que A et B sont des exponentielles de matrices :

$$\begin{aligned} A &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } \lambda_1, ..., \lambda_n \in]0,1[\\ &= P \begin{pmatrix} e^{\ln \lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\ln \lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = \exp \left(P \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ln \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \right), \end{aligned}$$

et de même pour B.

3. Faire un dessin.

4.(a) (cf. annexe exponentielles de matrices) $-I_2 = \exp(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$.

4.(b) $\alpha I_2 = \exp(\ln(\alpha) I_2)$ et

$$-\alpha I_2 = \alpha I_2 \times (-I_2) = \exp(\ln(\alpha) I_2) \times \exp(M) = \exp((\ln \alpha) I_2 + M)$$

car αI_2 commute avec toute matrice 2×2 donc en particulier avec M. Ainsi,

$$-\alpha I_2 = \exp \begin{pmatrix} \ln(\alpha) & -\pi \\ \pi & \ln(\alpha) \end{pmatrix}.$$

On est donc exactement dans le cadre du II. $\alpha \mathrm{Id}$ et $-\alpha \mathrm{Id}$ sont donc topologiquement conjugués.

5.(a) Notons (i), (ii) et (iii) les trois conditions "définissant" H.

Remarque : (iii) est superflue car c'est une conséquence de (ii) appliquée à $z = 0$, α étant supposé dans $]0,1[$.

Il s'agit juste de remarquer que (ii) entraîne (par une récurrence immédiate) :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad H(\alpha^k z) = (-\alpha)^k H(z), \quad \text{i.e} \quad H(z) = \frac{H(\alpha^k z)}{(-\alpha)^k}, \quad (*)$$

et que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|\alpha^k z| \in]\alpha, 1]$, i.e tel que $\alpha^k z$ appartient au domaine où H est défini par l'expression (i).

5.(b) Faire un dessin

5.(c) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et k l'unique entier tel que $|\alpha^k z| \in]\alpha, 1]$. Alors

$$H(\alpha^k z) = \alpha^k z e^{i \frac{\ln |\alpha^k z|}{\ln(\alpha)} \pi} = \alpha^k z e^{i \frac{k \ln(\alpha) + \ln |z|}{\ln(\alpha)} \pi} = (-\alpha)^k z e^{i \frac{\ln |z|}{\ln(\alpha)} \pi},$$

donc d'après $(*)$, $H(z) = z e^{i \frac{\ln |z|}{\ln(\alpha)} \pi}$. L'expression (i) est donc en fait valable pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

5.(d) L'expression de la question précédente montre que H est continue sur $\mathbb{C}^*$ comme composée de fonctions continue. Elle est également continue en 0 car $|H(z)| = |z| \to 0 = H(0)$ quand $z \to 0$. Soit maintenant $z' \in \mathbb{C}$. Montrons qu'il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ tel que $z' = H(z)$. Si

$z' = 0$, $z = 0$ est clairement l'unique nombre complexe qui convient. Supposons maintenant $z' \neq 0$.

$$\begin{aligned}
z' = H(z) &\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ et } z' = ze^{i\frac{\ln|z|}{\ln(\alpha)}\pi} \\
&\Leftrightarrow |z'| = |z| \quad \text{et} \quad Arg(z') = Arg(z) + \frac{\ln|z|}{\ln(\alpha)}\pi \\
&\Leftrightarrow |z| = |z'| \quad \text{et} \quad Arg(z) = Arg(z') - \frac{\ln|z'|}{\ln(\alpha)}\pi \\
&\Leftrightarrow z = z'e^{-i\frac{\ln|z'|}{\ln(\alpha)}\pi}
\end{aligned}$$

L'application H est donc bijective, d'inverse $H^{-1} : z \in \mathbb{C}^* \mapsto ze^{-i\frac{\ln|z|}{\ln(\alpha)}\pi}$, $H^{-1}(0) = 0$, elle aussi continue sur $\mathbb{C}$. C'est donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

5.(e) Par définition, $H \circ \alpha\mathrm{Id} = (-\alpha\mathrm{Id}) \circ H$, i.e. $\alpha\mathrm{Id} = H^{-1} \circ (-\alpha\mathrm{Id}) \circ H$. H étant un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$, $\alpha\mathrm{Id}$ et $-\alpha\mathrm{Id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont donc topologiquement conjugués.

Remarquons qu'en dimension 1, ceci n'est pas vrai d'après I.4.

6. La conjugaison topologique étant *transitive*, il suffit de montrer que tout automorphisme diagonalisable (dans $\mathbb{R}$) de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont de valeur absolue strictement inférieure à 1 et dont le déterminant est positif (resp. négatif) est topologiquement conjugué à $\frac{1}{2}\mathrm{Id}$ (resp. à $L_{\mathrm{Diag}(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$). Par un argument identique à celui de III.2, il suffit de considérer les automorphismes L_A *diagonaux* et on peut en outre supposer la diagonale composée de deux blocs, l'un à coefficients positifs et l'autres à coefficients négatifs : $A = \mathrm{Diag}(A_p, A_q)$ avec A_p (resp. A_q) diagonale, de coeff. diagonaux dans $]0,1[$ (resp. dans $]-1,0[$). D'après III.2, L_{A_p} (resp. L_{A_q}) est topologiquement conjugué à $\frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}$ (resp. $-\frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^q}$), qui est lui-même, d'après III.4. (et III.1) top. conj. à $\frac{1}{2}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^q}$ ou $L_{\mathrm{Diag}(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$ selon que q est pair ou impair, i.e selon que $\det(A) > 0$ ou < 0. Le III.1 permet alors de conclure.

7. La matrice de l'énoncé (appelons-la A) a pour unique v.p. $-\frac{1}{2}$. Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à $-\frac{1}{2}I_2$, et donc *égale* à $-\frac{1}{2}I_2$ puisque celle-ci commute avec toute matrice 2×2. Elle n'est donc pas diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$ ni dans $\mathbb{C}$). Supposons qu'elle soit l'exponentielle d'une matrice réelle M. M n'est pas diagonalisable sinon A le serait, donc, dans $\mathbb{C}$, M a une unique valeur propre λ. Celle-ci est nécessairement réelle, sinon M étant réelle, $\bar{\lambda} \neq \lambda$ constituerait une deuxième valeur propre. Mais d'après II.1, λ vérifie $e^\lambda = -\frac{1}{2}$. Contradiction. A n'est donc ni diagonalisable, ni une exponentielle de matrice réelle. Ainsi ce qui précède ne permet pas de traiter *tous* les automorphismes hyperboliques.

IV Classification topologique générale des isomorphismes contractants de $\mathbb{R}^n$

0. Il suffit de vérifier que pour tous M, $N \in M_n(\mathbb{R})$, $\exp(M)$ et $\exp(N)$ appartiennent à la même composante connexe par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$, et pour cela il suffit de vérifier que ces deux matrices appartiennent à la c.c. par arcs de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$. Or ceci est immédiat : $t \in [0,1] \mapsto \exp(tM) \in GL_n(\mathbb{R})$ constitue un chemin continu entre I_n et $\exp(M)$.

1. $A = \alpha I_2$, $B = -\alpha I_2$, $|.|_A = |.|_B = \|.\|$, $D_A = D_B =$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$, $L_A(D_A) = L_B(D_B) =$ la boule fermée centrée en 0 de rayon α, et

$$\mathcal{A}_A = \mathcal{A}_B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq \|x\| \leq 1\}.$$

Pour trouver un chemin entre B et A on peut s'inspirer de IV.0 et III.4.(b) : $B = \exp\begin{pmatrix} \ln(\alpha) & -\pi \\ \pi & \ln(\alpha) \end{pmatrix}$ et $A = \exp\begin{pmatrix} \ln(\alpha) & 0 \\ 0 & \ln(\alpha) \end{pmatrix}$ donc on peut prendre $A_t = \exp\begin{pmatrix} \ln(\alpha) & -(1-t)\pi \\ (1-t)\pi & \ln(\alpha) \end{pmatrix}$.

2.(a) Il y avait une faute dans l'énoncé : c'est D_A et $A.D_A$ qui sont convexes. En effet, pour tous $x, y \in D_A$ et tout $t \in [0,1]$, $|(1-t)x+ty|_A \leq (1-t)|x|_A + t|y|_A$ par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme $|.|_A$, ce qui est inférieur ou égal à 1, donc $(1-t)x+ty \in D_A$. L'image d'un ensemble convexe par une application *linéaire* étant convexe (vérification immédiate), $A.D_A$ est aussi convexe.

2.(b) On veut que pour tout $u \in S^{n-1}$, $\rho_A(0,u)u \in A.S_A$ et $\rho_A(1,u)u \in S_A$, ce qui équivaut à

$$A^{-1}\rho_A(0,u)u \in S_A \text{ (i.e } |A^{-1}\rho_A(0,u)u|_A = 1) \quad \text{et} \quad |\rho_A(1,u)u|_A = 1$$

$$\Leftrightarrow \rho_A(0,u) = |A^{-1}u|_A^{-1} \quad \text{et} \quad \rho_A(1,u) = |u|_A^{-1}$$

(ρ_A étant supposée à valeurs positives). Pour tout $u \in S^{n-1}$, il existe effectivement une seule fonction affine en t valant $|A^{-1}u|_A^{-1}$ en 0 et $|u|_A^{-1}$ en 1 : c'est

$$t \mapsto \frac{(1-t)}{|A^{-1}u|_A} + \frac{t}{|u|_A}.$$

Autrement dit, pour tout $(t,u) \in [0,1] \times S^{n-1}$,

$$\rho_A(t,u) = \frac{(1-t)}{|A^{-1}u|_A} + \frac{t}{|u|_A}.$$

2.(c) h_A est continue comme composée d'applications continues (les dénominateurs ne s'annulent pas...). Par construction, pour tout $u \in S^{n-1}$, $h_A([0,1] \times \{u\})$ est exactement l'intersection de la demi-droite vectorielle $\mathbb{R}_+ u$ avec $\mathcal{A}_A$. h_A est donc à valeur dans $\mathcal{A}_A$ et $h_A : [0,1] \times S^{n-1} \to \mathcal{A}_A$ est surjective. De plus, pour tout $v \in \mathcal{A}_A$,

$$\begin{aligned}
v = h_A(t,u) &\Leftrightarrow v \in \mathbb{R}_+^* u \text{ et } \|v\| = \rho_A(t,u) \\
&\Leftrightarrow u = \frac{v}{\|v\|} \text{ et } \frac{(1-t)}{|A^{-1}u|_A} + \frac{t}{|u|_A} = \|v\| \\
&\Leftrightarrow u = \frac{v}{\|v\|} \text{ et } \frac{(1-t)}{|A^{-1}v|_A} + \frac{t}{|v|_A} = 1 \\
&\Leftrightarrow u = \frac{v}{\|v\|} \text{ et } \frac{1}{|A^{-1}v|_A} - 1 = t\left(\frac{1}{|A^{-1}v|_A} - \frac{1}{|v|_A}\right) \\
&\Leftrightarrow u = \frac{v}{\|v\|} \text{ et } t = \frac{1-|A^{-1}v|_A}{1-\frac{|A^{-1}v|_A}{|v|_A}}.
\end{aligned}$$

(le dénominateur est non nul par définition de la norme adaptée). $h_A : [0,1] \times S^{n-1} \to \mathcal{A}_A$ est donc une bijection continue entre deux compacts, c'est donc un homéomorphisme, et l'étude ci-dessus, appliquée à $v = Ay$, $y \in S_A$, donne :

$$h_A^{-1}(Ay) = \left(\frac{1-|A^{-1}Ay|_A}{1-\frac{|A^{-1}Ay|_A}{|Ay|_A}}, \frac{Ay}{\|Ay\|}\right) = \left(0, \frac{Ay}{\|Ay\|}\right)$$

car $|y|_A = 1$ par hypothèse.

2.(d) Dans le cas particulier III.3-4-5,

$$\rho_A(t,u) = \frac{(1-t)}{|A^{-1}u|_A} + \frac{t}{|u|_A} = \frac{(1-t)}{\|\frac{1}{\alpha}u\|} + \frac{t}{\|u\|} = (1-t)\alpha + t,$$

donc

$$h_A : (t,u) \mapsto ((1-t)\alpha + t)u$$

(et $h_B = h_A$).

3. $A_0 = B$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (erreur de l'énoncé),

$$g(0, \tfrac{Ax}{\|Ax\|}) = \left(0, \frac{BA^{-1}\frac{Ax}{\|Ax\|}}{\|BA^{-1}\frac{Ax}{\|Ax\|}\|}\right) = (0, \tfrac{Bx}{\|Bx\|})$$

par linéarité, homogénéité de $\|.\|$ et simplification $A^{-1}A = I_n$.

4. Pour vérifier que h_0 est un homéomorphisme de $\mathcal{A}_A$ dans $\mathcal{A}_B$, sachant que $h_B : [0,1]\times S^{n-1} \to \mathcal{A}_B$ et $h_A^{-1} : \mathcal{A}_A \to [0,1] \times S^{n-1}$ sont des homéo., il suffit de vérifier que $g : [0,1] \times S^{n-1} \to [0,1]\times S^{n-1}$ est un homéo. Or g est bien défini (le dénominateur ne s'annule pas), continu comme composée d'applications continues, et pour tous (s,v) et $(t,u) \in [0,1] \times S^{n-1}$,

$$\begin{aligned}(s,v) = g(t,u) &\Leftrightarrow s = t \text{ et } v = \frac{A_sA^{-1}u}{\|A_sA^{-1}u\|}\\ &\Leftrightarrow s = t \text{ et } u = \frac{AA_s^{-1}v}{\|AA_s^{-1}v\|}\end{aligned}$$

donc g est bijective. Encore une fois, comme $[0,1] \times S^{n-1}$ est compact, g est donc un homéomorphisme (on peut montrer directement grêce à ce qui précède que son inverse est continu).

Maintenant, on vérifie facilement (dessin) que les seuls x de $\mathcal{A}_A$ tels que Ax appartient aussi à $\mathcal{A}_A$ sont les éléments de S_A. Or on a vu en IV.2.(c) que pour tout $x \in S_A$, $h_A^{-1}(Ax) = \left(0, \frac{Ax}{\|Ax\|}\right)$, donc

$$\begin{aligned}h_0(Ax) = h_B \circ g \circ h_A^{-1}(Ax) &= h_B \circ g \left(0, \frac{Ax}{\|Ax\|}\right)\\ &= h_B \left(0, \frac{Bx}{\|Bx\|}\right)\\ &= h_B \left(0, \frac{Bx}{\|Bx\|}\right) \quad \text{avec } y = \frac{x}{|x|_B} \in S_B\\ &= h_B \left(h_B^{-1}(By)\right) \quad \text{d'après IV.2.(c), en remplaçant } A \text{ par } B\\ &= By\end{aligned}$$

or

$$h_0(x) = h_B \circ g \circ h_A^{-1}(x) = h_B \circ g(1, \tfrac{x}{\|x\|}) = h_B(1, \tfrac{x}{\|x\|}) = \frac{x}{|x|_B} = y,$$

donc on a bien $h_0(Ax) = Bh_0(x)$ pour tout $x \in S_A$.

4.(b) Notons R_θ la matrice de rotation d'angle θ et $\theta_t = \frac{\ln((1-t)\alpha+t)}{\ln(\alpha)}\pi$ pour tout $t \in [0,1]$. Alors dans le cas particulier III.3-4-5, g est simplement l'application $(t,u) \mapsto (t, R_{\theta_t}, u)$. De plus, pour tout $x \in \mathcal{A}_A$, $h_A^{-1}(x) = (t_x, \frac{x}{||x||})$ avec $t_x \in [0,1]$ tel que $((1-t_x)\alpha + t_x)\frac{x}{||x||} = x$ ce qui équivaut à $t_x = \frac{\|x\|-\alpha}{1-\alpha}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}h_0(x) = h_B \circ g \circ h_A^{-1}(x) &= h_B \circ g(t_x, \tfrac{x}{||x||})\\ &= h_B(t_x, R_{\theta_{t_x}} \tfrac{x}{||x||})\\ &= \underbrace{((1-t_x)\alpha + t_x)}_{\|x\|} R_{\frac{\ln \|x\|}{\ln(\alpha)}\pi} \tfrac{x}{||x||},\end{aligned}$$

ce qui est précisément l'application h_0 du III.

5. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $L_A^j(D_A \setminus L_A(D_A)) = L_A^j(D_A) \setminus L_A^{j+1}(D_A)$ donc

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} L_A^j(D_A \setminus L_A(D_A)) \supset \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_-} L_A^j(D_A) \supset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{\alpha^j} D_A$$

par définition de la norme adaptée, donc finalement

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} L_A^j(D_A \setminus L_A(D_A)) = \mathbb{R}^n \text{ tout entier,}$$

et cette union est clairement disjointe, ce qui signifie précisément que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $j(x) \in \mathbb{Z}$ tel que $A^j(x)x \in D_A \setminus L_A(D_A)$.

6. Par définition, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$H_{|(L_A)^{-k}(\mathcal{A}_A)} = L_B^{-k} \circ h_0 \circ L_A^k,$$

donc H induit un homéomorphisme de $(L_A)^{-k}(\mathcal{A}_A)$ dans $L_B^{-k} \circ h_0 \circ L_A^k((L_A)^{-k}(\mathcal{A}_A)) = (L_B)^{-k}(\mathcal{A}_B)$. Il suffit donc de vérifier que H

V Classification topologique des isomorphismes hyperboliques de $\mathbb{R}^n$