Classification topologique des automorphismes hyperboliques de $\mathbb{R}^n$

Introduction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme L_A de $\mathbb{R}^n$, de matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique, est *hyperbolique* s'il ne possède pas de valeur propre (complexe) de module 1 (on dira alors également que A est hyperbolique). Si L_A et L_B sont deux telles applications, on dit que L_A est *topologiquement conjuguée* à L_B s'il existe un *homéomorphisme* H de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$L_A = H^{-1} \circ L_B \circ H.$$

1. Vérifier que la conjugaison topologique est une *relation d'équivalence.*
2. Vérifier que si $L_A = H^{-1} \circ L_B \circ H$, l'image par H de la *demi-orbite* $\{L_A^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'un point x quelconque de $\mathbb{R}^n$ par L_A est la demi-orbite $\{L_B^n(H(x))\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $H(x)$ par L_B : "H envoie les demi-orbites de L_A sur celles de L_B".

Le but de ce problème est de décrire les *classes de conjugaison topologique* des *isomorphismes* linéaires hyperboliques de $\mathbb{R}^n$.

I "Baby case" : cas $n = 1$

1. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\alpha\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (resp. $-\alpha\mathrm{Id}$) est topologiquement conjugué à $\frac{1}{2}\mathrm{Id}$ (resp. $-\frac{1}{2}\mathrm{Id}$). On pourra chercher un homéomorphisme de conjugaison H de la forme $x \mapsto x^r$, $r > 0$, sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que tout homéomorphisme H conjuguant $\alpha\mathrm{Id}$ à $\frac{1}{2}\mathrm{Id}$ fixe forcément l'origine : $H(0) = 0$.
3. Lorsque $\alpha \neq \frac{1}{2}$, peut-on trouver un *difféomorphisme* conjuguant $\alpha\mathrm{Id}$ à $\frac{1}{2}\mathrm{Id}$? (Indication : vu la question 1, le problème se situe manifestement en 0...)

   On admet que, de même, pour tout $\alpha \in]1, +\infty[$, $\alpha\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (resp. $-\alpha\mathrm{Id}$) est topologiquement conjugué à $2\mathrm{Id}$ (resp. $-2\mathrm{Id}$).
4. Montrer que les isomorphismes $\frac{1}{2}\mathrm{Id}$, $-\frac{1}{2}\mathrm{Id}$, $2\mathrm{Id}$ et $-2\mathrm{Id}$ ne sont pas topologiquement conjugués entre eux (on pourra étudier l'allure des (demi-)orbites pour chacun de ces isomorphismes).

   En déduire le nombre de classes de conjugaison topologique d'isomorphismes linéaires hyperboliques de $\mathbb{R}$.

On se place à nouveau dans le cas $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. On dit qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est contractant si toutes ses valeurs propres (complexes) sont de module strictement inférieur à 1.

II Lien avec les flots contractants

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$ définissant des applications linéaires contractantes. On suppose en outre qu'il existe $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A = \exp(M)$ et $B = \exp(N)$.

1. Montrer que les valeurs propres de A (resp. B) sont les $\exp(\lambda)$, avec λ valeur propre de M (resp. N).
2. En déduire que les *champs de vecteurs* $x \in \mathbb{R}^n \mapsto M.x$ et $x \mapsto N.x$ sont hyperboliques, puis que leurs flots sont conjugués.
3. En déduire que L_A et L_B sont topologiquement conjugués.
4. Montrer que toute matrice carrée réelle n'est pas une exponentielle de matrice réelle.

III Isomorphismes contractants diagonalisables

1. Soient p, $q \in \mathbb{N}$ tels que $n = p + q$, A_p, $B_p \in M_p(\mathbb{R})$, A_q, $B_q \in M_q(\mathbb{R})$, $A = \mathrm{diag}(A_p, A_q)$ et $B = \mathrm{diag}(B_p, B_q) \in M_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que si L_{A_p} et L_{B_p} d'une part, et L_{A_q} et L_{B_q} d'autre part, sont topologiquement conjugués, alors L_A et L_B le sont.
2. En déduire que deux automorphismes diagonalisables contractants de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont strictement comprises entre 0 et 1 sont topologiquement conjugués. Retrouver ce résultat à l'aide du II, et le comparer avec celui de la question I.1.
3. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Dessiner les demi-orbites par $\alpha\mathrm{Id}$ et $-\alpha\mathrm{Id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'un point quelconque de $\mathbb{R}^2$. Pouvez-vous imaginer un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui envoie l'une sur l'autre ? Sinon...
4. Commençons par nous convaincre qu'il en existe un.
   (a) Trouver M telle que $\exp(M) = -I_2$. (On pourra penser à l'isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et les matrices de similitudes, qui est compatible avec les exponentielles, ou bien se demander quel est le champ de vecteurs linéaire dont le temps 1 du flot est $-Id$).
   (b) En déduire M et N telles que $\exp(M) = \alpha I_2$ et $\exp(N) = -\alpha I_2$ et conclure.
5. Maintenant, construisons-le explicitement. On considère l'application $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :
$$\begin{cases} H(z) = z e^{i \frac{\ln|z|}{\ln(\alpha)} \pi} & \text{pour tout } z \text{ tel que } |z| \in]\alpha, 1] \\ H(\alpha z) = -\alpha H(z) & \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \\ H(0) = 0 \end{cases}$$
   (a) Vérifier que H est bien définie, c'est-à-dire qu'il existe une unique application H de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ satisfaisant les trois propriétés ci-dessus.
   (b) On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Dessiner l'image par H d'une demi-droite vectorielle quelconque de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Exprimer (le plus simplement possible) $H(z)$ en fonction de z pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   (d) Vérifier que H définit un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ (on pourra déterminer explicitement son inverse).
   (e) En déduire (à nouveau) que $\alpha\mathrm{Id}$ et $-\alpha\mathrm{Id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont topologiquement conjugués. Comparer ce résultat à celui de la question I.4.
6. En déduire que deux automorphismes diagonalisables de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont de valeur absolue strictement inférieure à 1 et dont les déterminants sont de même signe sont conjugués.
7. Montrer qu'il existe des matrices contractantes inversibles qui ne sont pas diagonalisables et qui ne s'écrivent pas non plus sous forme d'une exponentielle de matrice réelle, dès que $n \geq 2$. On pourra pour cela considérer la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   Cette observation motive la partie suivante.

III Classification topologique générale des isomorphismes contractants de $\mathbb{R}^n$

On admet le fait suivant (*à retenir*) :

Théorème 1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe une norme $|.|_*$ sur $\mathbb{R}^n$, dite adaptée à A, *et une constante $0 < a < 1$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$|A^n x|_* \le a^n |x|_* \quad \text{pour tout } n \ge 0 \quad (*)$$

(ii) Pour toute *norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$, il existe des constantes $0 < a < 1$ et $C \ge 1$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|A^n x\| \le C a^n \|x\| \quad \text{pour tout } n \ge 0\,;$$

(iii) Toutes les valeurs propres complexes λ de A satisfont $|\lambda| < 1$.

Ce résultat justifie la terminologie d'endomorphisme *contractant.* L'origine est alors appelée *puits (linéaire)* ou *point fixe attractif* pour cette application. De façon similaire, si toutes les valeurs propres d'un endomorphisme sont de module strictement supérieur à 1, l'endomorphisme est dit *dilatant* et l'origine est appelée *source (linéaire)* ou *point fixe répulsif.*

Le but de cette partie est de démontrer l'énoncé suivant :

Théorème 2. *Soient L_A et L_B deux endomorphismes contractants de $\mathbb{R}^n$, de matrices A et B* inversibles *et appartenant à la même composante connexe de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors L_A et L_B sont topologiquement conjugués.*

0. Justifier que le résultat obtenu en II.3 est un cas particulier du résultat ci-dessus.

Ce théorème est également une généralisation du résultat obtenu en III.6, les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$ étant précisément $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) < 0\}$.

Soient A et B deux matrices contractantes *inversibles* appartenant à la même composante connexe de $GL_n(\mathbb{R})$ et soit $t \in [0,1] \mapsto A_t$ un chemin dans $GL_n(\mathbb{R})$ reliant B à A ($A_0 = B$ et $A_1 = A$). Notons $|.|_A$ et $|.|_B$ des normes *adaptées* à A et B respectivement (cf. Théorème 1.(i)), et $\|.\|$ la norme euclidienne classique. Notons D_A et S_A (resp. D_B et S_B) la boule et la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $|.|_A$ (resp. $|.|_B$) :

$$D_A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_A \le 1\} \quad \text{et} \quad S_A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_A = 1\}.$$

Pour prouver le théorème 2, l'idée est de commencer par construire un homéomorphisme h_0 entre les “anneaux”

$$\mathcal{A}_A = \overline{D_A \setminus L_A(D_A)} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_B = \overline{D_B \setminus L_B(D_B)},$$

tel que, si x et Ax sont dans $\mathcal{A}_A$, $h_0(Ax) = Bh_0(x)$, puis de l'étendre en un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tout entier. Cette construction généralise celle de l'homéomorphisme H du II.3.

1. Qui sont, d'après vous, A, B, $|.|_A$, $|.|_B$, $\mathcal{A}_A$ et $\mathcal{A}_B$ dans le cas particulier III.3-4-5. ? Proposer un chemin $t \in [0,1] \mapsto A_t$ reliant B à A.
2. On commence par construire un homéomorphisme $h_A : [0,1] \times S^{n-1} \to \mathcal{A}_A$ (où S^{n-1} désigne la sphère unité standard dans $\mathbb{R}^n$) de la forme : $h_A(t,u) = \rho_A(t,u)u$, avec $\rho_A : [0,1] \times S^{n-1} \to \mathbb{R}_+$.

    (a) Vérifier que S_A et $A.S_A$ sont convexes.

(b) Expliciter l'unique fonction ρ_A affine en t (à u fixé) satisfaisant $h_A(\{1\} \times S^{n-1}) = S_A$ et $h_A(\{0\} \times S^{n-1}) = L_A(S_A)(= A.S_A)$.

(c) Vérifier que h_A définit bien un homéomorphisme de $[0,1] \times S^{n-1}$ dans $\mathcal{A}_A$ et calculer $h_A^{-1}(Ay)$ pour tout $y \in S_A$.

(d) Qui est h_A dans le cas particulier III.3-4-5. ?

On définit de même $h_B : [0,1] \times S^{n-1} \to \mathcal{A}_B$ de la forme : $h_B(t,u) = \rho_B(t,u)u$, avec $\rho_B : [0,1] \times S^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ affine en t.

3. On définit maintenant $g : [0,1] \times S^{n-1} \to [0,1] \times S^{n-1}$ par $g(t,u) = (t, \frac{A_t A^{-1} u}{\|A_t A^{-1} u\|})$. Vérifier que pour tout $u \in S^{n-1}$, $g(0, \frac{A.u}{\|A.u\|}) = (0, \frac{B.u}{\|B.u\|})$.

4. (a) Vérifier que $h_0 = h_B \circ g \circ h_A^{-1} : \mathcal{A}_A \to \mathcal{A}_B$ est un homéomorphisme satisfaisant $h_0(Ax) = Bh_0(x)$ pour tout x dans $\mathcal{A}_A$ tel que Ax appartient aussi à $\mathcal{A}_A$.

   (b) Déterminer h_0 dans le cas particulier III.3-4-5 en prenant pour A_t, $t \in [0,1]$, le produit de αI_2 et de la matrice de la rotation d'angle $\frac{\ln((1-t)\alpha+t)}{\ln(\alpha)}\pi$.

5. Montrer que pour tout $x \neq 0$, il existe un unique $j(x) \in \mathbb{Z}$ tel que $A^{j(x)}x \in D_A \setminus L_A(D_A)$.

6. On définit alors H de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ B^{-j(x)}.h_0(A^{j(x)}.x) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Vérifier que H est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui conjugue L_A à L_B. On pourra commencer par vérifier que H induit un homéomorphisme de $\mathcal{A}_A$ dans $\mathcal{A}_B$ puis de $(L_A)^k(\mathcal{A}_A)$ dans $(L_B)^k(\mathcal{A}_B)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et enfin étudier la continuité de H et H^{-1} en 0.

7. Exemple : trouver un H convenable dans le cas où $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}I_2$. On pourra commencer par observer que la norme euclidienne standard est adaptée à A et B.

IV Classification topologique des isomorphismes hyperboliques de $\mathbb{R}^n$

Soit L_A un isomorphisme hyperbolique de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une unique décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe de deux sous-espaces E_s et E_u stables par L_A telle que les applications induites par L_A sur E_s et E_u soient respectivement contractante et dilatante. E_s et E_u sont appelés respectivement *sous-espaces stable* et *instable* de L_A.

Déduire du théorème 2 et de la question II.1 l'énoncé suivant :

Théorème 3. *Soient L_A et L_B deux isomorphismes hyperboliques de $\mathbb{R}^n$, de matrices A et B* inversibles. *Si les sous-espaces stables de L_A et L_B ont même dimension et que les déterminants des automorphismes contractants (resp. dilatants) induits par L_A et L_B sur leurs sous-espaces stables (resp. instables) respectifs sont de même signe, alors L_A et L_B sont conjugués.*

De plus, la réciproque de ce théorème est vraie, ce qui fournit finalement une classification topologique des isomorphismes hyperboliques de $\mathbb{R}^n$ en fonction de la répartition de leur *spectre* par rapport au cercle unité de $\mathbb{C}$.