TD 4 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1. *Interversion série intégrale*

On pose $f_n(x) = (n+1)\cos^n(x)\sin(x)$.

1. Déterminer la limite simple des fonctions f_n.
2. Montrer que $\int_0^{\pi/2} f(t)dt \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$.
3. Montrer que la série des f_n converge simplement.
4. Converge-t-elle normalement ? (On pourra étudier la suite $f_n(1/n)$.)
5. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la série des f_n converge normalement sur $]\varepsilon, \pi/2]$. Que peut-on en déduire ?
6. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ n'est pas continue en 0.

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}_+$, $u_n = \ln\left(1 + \frac{X^2}{n^2}\right)$.

1. Vérifier que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $\sum u'_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que pour tout $A > 0$, $\sum u'_n$ converge normalement sur $[0, A]$.
4. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3. *Série de fonctions*

Soit $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2n^2}$ sous réserve de convergence ($a \in \mathbb{R}$).

1. Domaine de définition de f ?
2. Régularité de f ?
3. Limite de $f(a)$ quand $a \to +\infty$?

Exercice 4. *Fonction ζ de Riemann*

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de ζ. Montrer que ζ est de classe C^∞ sur ce domaine.

2. Prouver que $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$ (majorer $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ par comparaison à une intégrale).
3. Prouver que $\lim_{x\to 1} \zeta(x) = +\infty$.

Exercice 5. *Fonction ζ de Riemann et constante d'Euler*

1. Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma.$$
2. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$
3. Montrer que
$$\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right).$$
4. Montrer enfin que
$$\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k) - 1}{k}.$$