Définitions et propriétés à connaître par cœur

— sommes de Riemann ;

— linéarité et positivité de l'intégrale ;

— lien entre intégrales et primitives ;

— changement de variable et intégration par parties.

Exercice 40. $(*)$
Pour chacune des intégrales suivantes, déterminer les réels $a < b$ tels que l'intégrande soit intégrable sur $[a, b]$ et calculer alors la valeur de l'intégrale.

1. $\int_a^b t^n dt$ où $n \in \mathbf{N}$
2. $\int_a^b e^{\alpha t} dt$ où $\alpha \in \mathbf{C}$
3. $\int_a^b \sqrt{t} dt$
4. $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t}}$
5. $\int_a^b t^{1/3} dt$
6. $\int_a^b \frac{dt}{1+t^2}$

Exercice 41. Sommes de Riemann $(*)$
1) Montrer que la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$$

converge et calculer sa limite.
2) Pour quelle valeur du réel α la suite de terme général

$$v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sin \frac{k}{n}$$

est-elle une suite de sommes de Riemann ? Que vaut alors sa limite ? Que se passe-t-il pour les autres valeurs de α ?

Exercice 42. $(*)$
À l'aide de sommes de Riemann, montrer que l'on a les équivalents suivants

1. $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}$ (où $\alpha > 0$)
2. $\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k \sim n \ln n$

Exercice 43. Fractions rationnelles $(*)$
Calculer les primitives suivantes.

1. $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$
2. $\int \frac{dx}{x(1+x)^2}$
3. $\int \frac{dx}{4x^2-3x+2}$
4. $\int \frac{x^2}{x^4-1} dx$
5. $\int \frac{dx}{49-4x^2}$
6. $\int \frac{5x-12}{x(x-4)} dx$
7. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$

Exercice 44. Changement de variable $(*)$
Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx$
2. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$
3. $\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx$
4. $\int_0^X \sqrt{1-x^2} dx$ pour $-1 \leq X \leq 1$
5. $\int_1^X \sqrt{x^2-1} dx$ pour $X \geq 1$
6. $\int_0^X \sqrt{x^2+1} dx$ pour $X \in \mathbf{R}$

Exercice 45. Linéarisation et règles de Bioche $(*)$
Calculer les primitives suivantes.

1. $\displaystyle\int \sin^3(x)dx$
2. $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$
3. $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^3(x)dx$
4. $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^4(x)dx$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}dx$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}dx$
7. $\displaystyle\int \tan x dx$
8. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}dx$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$
10. $\displaystyle\int \frac{\sin^4(x)}{\cos^2(x)}dx$

Exercice 46. $(*)$
Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^X \ln x dx$ pour $X > 0$
2. $\displaystyle\int x^3 \ln x dx$ pour $X > 0$
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^X e^{-x}\cos x dx$ pour $X > 0$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$ pour $n \in \mathbf{N}$

Exercice 47. $(*)$
Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continue. On pose $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)dt$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Exercice 48. $(**)$
Soit P un polynôme et $a \in \mathbf{R}$.
1) Montrer que les primitives $\displaystyle\int P(x)e^{ax}dx$ sont de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax} + C$ où Q est un polynôme et C est une constante.
2) Montrer que les primitives $\displaystyle\int P(x)\cos(ax)dx$ sont de la forme $x \mapsto Q_1(x)\cos(ax)+Q_2(x)\sin(ax)+C$ où Q_1 et Q_2 sont des polynômes et C est une constante.