MM049 **2011-2012**
Université Paris 6

Méthodes de résolution explicite

Exercice 1. Équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation

$$(E) \quad t(t-1)x' + (t-1)x = 1$$

sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. (E) admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Sur $]-\infty, 1[$? Si oui, lesquelles ?

Exercice 2. Système différentiel linéaire à coefficients constants avec second membre. On considère le système différentiel :

$$(E) \quad \begin{cases} x' &= & y \\ y' &= & 2x - y + e^t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

et on note (E_0) le système sans second membre associé.

1. Écrire la matrice A de (E_0) et calculer e^{tA}.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_0).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 3. Équations de Ricatti et Bernoulli. On considère l'équation

$$x' - \frac{x^2}{t} + \left(2 + \frac{1}{t}\right) x = t + 2, \quad t \in \mathbb{R}_+^*.$$

1. Cette équation vérifie-t-elle les hypothèses de Cauchy-Lipschitz ?
2. Chercher une solution polynômiale simple (de degré ≤ 1).
3. En déduire l'ensemble de ses solutions maximales. Plus précisément, on déterminera, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, la solution maximale satisfaisant cette condition initiale, en précisant son intervalle de vie.

On considère maintenant l'équation

$$(E) \quad tx' - x^2 + (2t+1)\,x = t^2 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Combien de solutions maximales (c'est-à-dire non prolongeables) de (E) satisfont la condition initiale (t_0, x_0) ? Préciser leur intervalle de définition. (E) admet-t-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 4. Équation différentielle autonome du premier ordre. On considère l'équation différentielle

$$x' = f(x), \quad \text{avec} \quad f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x(1-x). \end{cases}$$

1. Cette équation vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz ?
2. Pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, déterminer la solution maximale valant x_0 en $t = t_0$. Préciser son intervalle de définition et son comportement au voisinage des bornes de cet intervalle.

Exercice 5. Équation à variables séparées. On considère l'équation différentielle

$$x' = f(t, x), \quad \text{avec} \quad f : \begin{cases}]-1,1[^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \sqrt{\frac{1-x^2}{1-t^2}}. \end{cases}$$

1. Cette équation vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz ?
2. Déterminer les solutions maximales de cette équation. Préciser leur intervalle de définition et leur comportement au voisinage des bornes de cet intervalle.

Exercice 6. Équation dont on connaît une intégrale première dépendant du temps. On considère l'équation

$$(E) \quad x' = \frac{x}{t + x^2} \quad \text{sur} \quad U = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, t + x^2 \neq 0\}.$$

1. Cette équation vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz ?
2. Vérifier que la fonction
$$V : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & \frac{t}{x} - x \end{array}$$
est une intégrale première de (E).
3. Dessiner U et l'allure des courbes de niveaux de V.
4. En déduire les solutions maximales de (E). Préciser leur intervalle de définition et leur comportement au voisinage des bornes de cet intervalle.