Solutions maximales, intervalle de vie

Corrections

Conséquence de l'unicité globale dans le cas autonome

Exercice 1.— D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui s'applique ici car X est supposé localement Lipschitz sur Ω), le problème de Cauchy

$$(*)\quad \begin{cases} x' &= X(x) \\ x(\tau) &= p \end{cases}$$

admet une unique solution maximale, notée x_τ, et toute autre solution de $(*)$ est une restriction de x_τ. Notons y l'application

$$\begin{array}{rcl} J+\tau & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & x_0(t-\tau), \end{array}$$

Pour montrer que $x_\tau = y$, il suffit donc de montrer que 1) y est solution de $(*)$ et 2) l'intervalle de vie de x_τ est inclus dans l'intervalle de définition de y, $J+\tau$.

1) Tout d'abord, $y(\tau) = x_0(\tau-\tau) = p$ donc y satisfait le deuxième point de $(*)$. De plus, y est bien définie et dérivable sur $J+\tau$ (car x_0 l'est sur J), et pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} y'(t) &= x_0'(t-\tau) \quad \text{par composition} \\ &= X(x_0(t-\tau)) \quad \text{car } x_0 \text{ est solution de } x' = X(x) \\ &= X(y(t)). \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de $(*)$. L'intervalle de vie I de x_τ contient donc $J+\tau$, et x_τ coïncide avec y sur $J+\tau$.

2) Montrons maintenant que $I \subset J+\tau$. De façon similaire à ce qui précède, on peut montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} I-\tau & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & x_\tau(t+\tau) \end{array}$$

est solution de

$$(**)\quad \begin{cases} x' &= X(x) \\ x(0) &= p, \end{cases}$$

et donc restriction de la solution maximale de ce problème : x_0. En particulier, $I-\tau$ est inclus dans l'intervalle de vie J de x_0, ce qui équivaut à $I \subset J+\tau$, et conclut donc la preuve de : $x_\tau = y$.

Exercice 2.— Partition de l'espace par les orbites. Soient $\mathcal{O}_1 = \{x_1(t), t \in J_1\}$ et $\mathcal{O}_2 = \{x_2(t), t \in J_2\}$ deux orbites de X (où les $x_k : J_k \to \Omega$, $k = 1, 2$, sont des solutions maximales de $x' = X(x)$). Supposons que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ ont un point commun p : il existe $t_1 \in J_1$ et $t_2 \in J_2$ tels que $x_1(t_1) = x_2(t_2) = p$. Soit maintenant $x_0 : J_0 \to \Omega$ la solution maximale de $x' = X(x)$ satsifaisant la condition initiale $x(0) = p$. Alors d'après l'exercice précédent, pour $k = 1$ et 2,

$$x_k \;=\; \begin{array}{rcl} J+t_k & \to & \Omega \\ t & \mapsto & x_0(t-t_k), \end{array}$$

donc $\mathcal{O}_k = \{x_0(t-t_k), t \in J+t_k\} = \{x_0(t), t \in J\}$. Les orbites $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont donc confondues.

Exercice 3.— Orbites périodiques. Il suffit de *construire* une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (donc nécessairement maximale), T-périodique et coïncidant avec x en t_0. Par unicité de la solution maximale à un problème de Cauchy donné, cette solution sera nécessairement x elle-même.

Il existe une unique application $\tilde{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ T-périodique et coïncidant avec x sur $[t_0, t_0+T[$. Comme x est dérivable en tout point de l'ouvert $]t_0, t_0+T[$, $\tilde{x}$ l'est également, et pout tout $t \in]t_0, t_0+T[$,

$$\tilde{x}'(t) = x'(t) = X(x(t)) = X(\tilde{x}(t)).$$

Par T-périodicité, il suffit alors, pour prouver que $\tilde{x}$ est solution sur $\mathbb{R}$, de vérifier que $\tilde{x}$ est dérivable à gauche et à droite en t_0 et que les dérivées sont toutes deux égales à $X(\tilde{x}(t_0) = X(x(t_0))$. La dérivabilité à droite découle de celle de x puisque x et $\tilde{x}$ coïncident sur $[t_0, t_0+T[$. Ainsi, $\tilde{x}'_d(t_0) = x'_d(t_0) = x'(t_0)$. Et à gauche, $\tilde{x}$ coïncide avec $x(.+T)$ sur $[t_0-T, t_0[$ par construction, et en fait jusqu'en t_0 puisque $\tilde{x}(t_0) = x(t_0) = x(t_0+T)$. Or $x(.+T)$ admet $x'_g(t_0+T) = x'(t_0+T)$ comme dérivée à gauche en t_0, donc $\tilde{x}$ aussi. Mais

$$\begin{aligned} x'(t_0+T) &= X(x(t_0+T)) \quad \text{car } x \text{ est solution} \\ &= X(x(t_0)) \quad \text{car } x(t_0) = x(t_0+T) \\ &= x'(t_0). \end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{x}$ est bien solution sur $\mathbb{R}$.

Estimation de l'intervalle de vie : conditions géométriques

Exercice 4.— Champ de vecteurs à support compact. Supposons le support K de X compact. On veut montrer que toute solution maximale de $x' = X(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Soit $\gamma : J \to \Omega$ une telle solution.

Cas 1 : il existe $t_0 \in J$ tel que $\gamma(t_0) \in \Omega \setminus K$. Alors $X(\gamma(t_0)) = 0$. L'application constante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \Omega \\ t & \mapsto & \gamma(t_0) \end{array}$$

est alors solution du problème de Cauchy

$$(*) \begin{cases} x' &= X(x) \\ x(t_0) &= \gamma(t_0) \end{cases}$$

Par unicité de la solution maximale à ce problème, γ est définie sur $\mathbb{R}$ (ce qu'on voulait) et constante égale à $\gamma(t_0)$.

Cas 2 : $\gamma(J) \subset K$. Alors d'après le Lemme de sortie de tout compact (version “équation autonome”), $J = \mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 5.— Champ de vecteurs tangent à des sphères concentriques. Soit $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $x' = X(x)$. Alors $\|\gamma\|^2$ est dérivable et pour tout $t \in J$,

$$(\|\gamma\|^2)'(t) = 2\langle \gamma'(t), \gamma(t)\rangle = 2\langle X(\gamma(t)), \gamma(t)\rangle = 0$$

Ainsi, $\|\gamma\|^2$ (et a fortiori $\|\gamma\|$) est constante sur J. Soit $t_0 \in J$ et S la sphère de centre $0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $\|\gamma(t_0)\|$. On a $\gamma(J) \subset S$. Or S est un compact de $\mathbb{R}^n$ (on est en dimension *finie*), donc d'après le Lemme de sortie de tout compact (version "équation autonome"), $J = \mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 6.— Champ de vecteurs rentrant le long d'une hypersurface. **1.** Soit $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$ une solution de $x' = X(x)$ satisfaisant $\gamma(t_0) \in F$ pour un certain $t_0 \in J$, et supposons que γ ne satisfait *pas*

$$\forall t \geq t_0 (t \in J), \quad \gamma(t) \in F,$$

c'est-à-dire que $\{t \geq t_0; f(\gamma(t)) > 0\}$ est non vide. Par continuité de f et γ, $f(\gamma(t_1)) \geq 0$. En outre, soit $t_1 = t_0$ et alors $f(\gamma(t_1)) \leq 0$, soit $t_0 < t_1$, et alors pour tout $t \in [t_0, t_1[$ (non vide), $f(\gamma(t)) < 0$ $(*)$ donc par continuité, $f(\gamma(t_1)) \leq 0$. Finalement, $f(\gamma(t_1)) = 0$. Mais alors par hypothèse sur f et X, $df_{\gamma(t_1)}.X(\gamma(t_1)) < 0$. Or

$$df_{\gamma(t_1)}.X(\gamma(t_1)) = df_{\gamma(t_1)}.\gamma'(t_1) = (f \circ \gamma)'(t_1). \quad (**)$$

Mais alors pour tout $t > t_1$ suffisamment proche de t_1, $f(\gamma(t)) < 0$ ce qui est incompatible avec $t_1 = \inf\{t \geq t_0; f(\gamma(t)) > 0\}$. Contradiction.

On a donc bien :

$$\forall t \geq t_0 (t \in J), \quad \gamma(t) \in F.$$

Exercice 7.— Traité en TD.

Exercice 8.— (*Correction tapée rapidement, il y a sûrement des erreurs...*) **1.** D'après l'indication de l'énoncé, il suffit de trouver une fonction f sur $\mathbb{R}^m$ telle que le champ fX soit borné, par exemple $f = \frac{1}{\|X\|+1}$.

2. Si x ne satisfait pas (a), il existe une suite (t_n) tendant vers β telle que $(x(t_n))$ soit bornée, donc incluse dans un compact de $\mathbb{R}^m$. Mais alors quitte à extraire, on peut supposer que la suite $(x(t_n))$ converge dans $\mathbb{R}^m$. La limite x_∞ est dans l'adhérence de Ω, mais pas dans Ω sinon $\{x(t_n)\} \cup \{x_\infty\}$ formerait un fermé borné donc compact de Ω, dont x ne sortirait pas définitivement quand t tend vers β, ce qui contredirait la maximalité de x d'après le théorème d'explosion. Ainsi, $x_\infty \in \partial\Omega$.

3. Soit $x_0 \in \partial\Omega$ quelconque. Alors pour tout $x \in \Omega$, $d(x, \partial\Omega) \leq \|x - x_0\| \leq \|x\| + \|x_0\|$. Ainsi, si x désigne maintenant une solution maximale d'intervalle de vie $]\alpha, \beta[$, pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, $\|Y(x(t))\| < \frac{1}{2} d(x(t), \partial\Omega) \leq \frac{1}{2}\|x(t)\| + \frac{1}{2}\|x_0\|$. Si l'on suppose que x satisfait (a), on a en outre $x(t) \neq 0$ pour tout t à partir d'un certain rang. On peut alors appliquer les questions 1 à 3 de l'exercice 7, et on obtient que $\beta = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, x ne peut satisfaire (a).

4. Soit n_0 tel que $\frac{1}{2^{n_0}} < d(x(t_0), \partial\Omega)$. Comme $(x(t_n))$ tend vers $x_\infty \in \partial\Omega$, $\inf_{t \in [t_0, \beta[} d(x(t), \partial\Omega) = 0$. La fonction $t \mapsto d(x(t), \partial\Omega)$ étant continue, par le théorème des valeurs intermédiaires elle prend toutes les valeurs entre 0 et $d(x(t_0), \partial\Omega)$. En particulier, pour tout $n \geq n_0$, il existe $t'_n \in [t_0, \beta[$ tel que $d(x(t'_n), \partial\Omega) = \frac{1}{2^n}$. En s'y prenant un peu mieux, on peut en outre imposer (t'_n) croissante. Pour tout n, on peut alors trouver $a_n < b_n \in [t'_n, t'_{n+1}]$ tels que

$$d(x(a_n), \partial\Omega) = \frac{1}{2^n}, \quad d(x(b_n), \partial\Omega) = \frac{1}{2^{n+1}} \quad \textit{et} \quad d(x(t), \partial\Omega) \in [\tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{2^{n+1}}], \ \forall t \in [a_n, b_n].$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{n+1}} &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= d(x(a_n), \partial\Omega) - d(x(b_n), \partial\Omega) \\
&\leq \|x(a_n) - x(b_n)\| \\
&= \| \int_{a_n}^{b_n} Y(x(t))dt\| \\
&\leq \left| \int_{a_n}^{b_n} \|Y(x(t))\|dt \right| \\
&\leq \left| \int_{a_n}^{b_n} \tfrac{1}{2} d(x(t), \partial\Omega)dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2}|b_n - a_n| \tfrac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

et donc $t'_{n+1} - t'_n \geq b_n - a_n \geq 1$. Puisque $t'_n \in]\alpha, \beta[$ pour tout n, on a donc nécessairement $\beta = +\infty$. (Rq : on n'a pas fait en sorte que (t'_n) satisfasse la condition 2. On pourrait, mais ce ne sera en fait pas utile pour la suite). Toute solution de $x' = Y(x)$ est donc définie jusqu'en $+\infty$. Le même argument donne $-\infty$ comme borne inférieure de l'intervalle de vie.

5. Il ne reste donc plus qu'à montrer que pour tout champ X sur Ω, il existe une fonction f telle que $\|fX\| \leq \frac{1}{2}d(x, \partial\Omega)$. On peut prendre par exemple

$$f = \frac{d(x, \partial\Omega)}{\|X\| + 1}$$

(noter qu'une telle fonction est localement lipschitzienne).