Solutions maximales, intervalle de vie

Dans tous les exercices, on suppose les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz satisfaites.

Conséquence de l'unicité globale dans le cas autonome

Soit X un *champ de vecteurs* localement Lipschitz défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (*i.e* une application localement Lipschitz de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$).

Étant donné $p \in \Omega$, l'*orbite de p par X*, notée $\mathcal{O}_p$, est l'image de la solution maximale $x : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de l'équation $x' = X(x)$ satisfaisant $x(0) = p$:

$$\mathcal{O}_p = \{x(t), t \in J\}.$$

Plus simplement, par "orbite de X", on entend "orbite d'un certain point de Ω par X".

Exercice 1.— Soit $p \in \Omega$ et soit $x_0 : J \to \mathbb{R}^n$ la solution maximale de l'équation $x' = X(x)$ satisfaisant la condition initiale $x(0) = p$. Montrer que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, la solution maximale x_τ satisfaisant la C.I. $x(\tau) = p$ est :

$$\begin{array}{ccc} J+\tau & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & x_0(t-\tau), \end{array}$$

où $J + \tau$ désigne $\{t + \tau, t \in J\}$.

Exercice 2.— Partition de l'espace par les orbites. Montrer que deux orbites de X sont soit disjointes soit confondues.

Exercice 3.— Orbites périodiques. Soit x une solution maximale de l'équation $x' = X(x)$ satisfaisant $x(t_0 + T) = x(t_0)$ pour un certain t_0 de son intervalle de définition et un certain réel T. Montrer que x est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et T-périodique (*i.e* satisfait $x(t+T) = x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).

Estimation de l'intervalle de vie : conditions géométriques

Un champ de vecteurs X est dit *complet* si toutes les solutions maximales de $x' = X(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 4.— Champ de vecteurs à support compact. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs sur Ω. On appelle *support* de X le fermé $\overline{\Omega \setminus X^{-1}(\{0\})}$ de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que si le support de X est compact, X est complet.

Exercice 5.— Champ de vecteurs tangent à des sphères concentriques. Soit $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs satisfaisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle X(x), x\rangle = 0.$$

Montrer que X est complet.

Exercice 6.— Champ de vecteurs rentrant le long d'une hypersurface. Soit f une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Notons $F = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0\}$. Soit X un champ de vecteurs C^1 défini sur un voisinage U de F et satisfaisant :

$$\forall x \in f^{-1}(\{0\}), \quad df(x).X(x) < 0.$$

1. Montrer que toute solution x de l'équation $x' = X(x)$ satisfaisant $x(t_0) \in F$ pour un certain temps t_0 de son intervalle de définition satisfait

$$\forall t \geq t_0, \quad x(t) \in F.$$

2. Si F est compact, en déduire que l'intervalle de vie d'une telle solution contient $[t_0, +\infty[$.
3. (Application)

Estimation de l'intervalle de vie : conditions analytiques

Exercice 7.— Non explosion quand $X(t,x)$ croît au plus linéairement en x. On veut prouver l'énoncé suivant :

Théorème. *Soit $X : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. On suppose qu'il existe des constantes a et b telles que, pour tout $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$,*

$$\|X(t,x)\| < a\,\|x\| + b,$$

(où $\|.\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$). Alors les solutions maximales de l'équation $x' = X(t,x)$ sont définies sur I tout entier.

Dans un premier temps, on suppose que $\|.\|$ est la norme euclidienne, et on considère une solution maximale x, d'intervalle de vie $]\alpha, \beta[$, telle qu'il existe $t_0 \in]\alpha, \beta[$ tel que, pour tout $t \geq t_0$, $x(t) \neq 0$.
1. Montrer que l'application $m : t \mapsto \|x(t)\|$ est dérivable sur $[t_0, \beta[$, et que $m'(t) \leq \|x'(t)\|$ pour tout t dans cet intervalle.
2. Montrer que sur l'intervalle $[t_0, \beta[$, la fonction m est majorée par la solution y de l'ED $y' = ay + b$ valant $m(t_0)$ en t_0.
3. En déduire que β est aussi la borne supérieure de l'intervalle I.
4. Terminer la preuve du théorème.
5. Retrouver le fait que, dans le cas d'une équation linéaire $x' = A(t)x + B(t)$, avec $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ continues, les solutions maximales sont définies sur I tout entier.

Exercice 8.— Reparamétrage. On veut montrer l'énoncé suivant :

Théorème. *Pour tout champ de vecteurs localement Lipschitz sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$, il existe une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}_+^*$ telle que le champ $Y = fX$ soit (localement Lipschitz et) complet.*

1. Démontrer le théorème dans le cas où Ω est $\mathbb{R}^m$ tout entier (on pourra par exemple commencer par remarquer, grâce à l'exercice précédent, qu'un champ de vecteurs *borné* sur $\mathbb{R}^m$ est complet).

On suppose dorénavant que $\Omega \neq \mathbb{R}^m$. L'idée de la preuve est alors de choisir f qui décroît assez vite lorsque x tend vers le bord de Ω, de façon à ce qu'une solution "mette un temps infini à atteindre le bord".

Soit Y un champ de vecteurs sur Ω.

2. Soit x une solution maximale de $x' = Y(x)$ qui n'est pas définie pour tout temps > 0. Notons β la borne sup de son intervalle de définition. Montrer que x satisfait l'une des propriétés suivantes :

(a) $\|x(t)\|$ tend vers l'infini quand t tend vers β ;

(b) il existe une suite de temps (t_n) telle que la suite $(x(t_n))$ tend vers un point x_∞ du bord de Ω.

On suppose que le champ Y vérifie la condition de décroissance au bord suivante : pour tout x dans Ω,

$$\|Y(x)\| < \frac{1}{2} d(x, \partial\Omega).$$

Supposons qu'il existe une solution maximale x de $x' = Y(x)$ qui ne soit pas définie pour tout temps > 0.

3. Montrer, en s'inspirant de l'exercice précédent, que x ne peut satisfaire la propriété (a).

4. Supposons que x satisfait la propriété (b). Montrer qu'il existe une autre suite de temps $(t'_n)_{n \geq n_0}$ telle que

1. $d(x(t'_n), \partial\Omega) = \frac{1}{2^n}$,
2. $d(x(t), \partial\Omega) \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $t \geq t'_n$.

Montrer que $t'_{n+1} \geq t'_n + 1$. Conclure.

5. Terminer la preuve de la proposition.