TD 5 : dérivées partielles, différentielle.

Exercice 1 : Ensemble de définition, Dérivées partielles
Pour les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes, trouver et représenter dans $\mathbb{R}^2$ le domaine de définition, puis calculer les dérivées partielles premières lorsqu'elles existent.

$$f(x,y) = x^3 + x^2\sin(xy), \qquad f(x,y) = x^4 e^y, \qquad f(x,y) = \ln(1 - \|(x,y)\|_2^2),$$
$$f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right), \quad f(x,y) = \sqrt{x-y^2}, \quad f(x,y) = \ln(\sin(x-y)).$$

Exercice 2 : Dérivées directionnelles I
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y^2/x$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$.

1. Soit θ un réel fixé. Que représente géométriquement la fonction $g_\theta(r) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$?
2. Montrer que pour tout réel θ, la fonction g_θ est dérivable en 0.
3. Montrer que pourtant, f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3 : Dérivées directionnelles II
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x\cos y + ye^x$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit $\vec{u_\theta}$ le vecteur de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculer la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ dans la direction de $\vec{u_\theta}$. Pour quelle valeur de θ est-elle maximale ? Interpréter cette information sur le graphe de f.

Exercice 4 : Matrice Jacobienne
Calculer la matrice jacobienne en tout point de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivante et exprimer la différentielle $\mathrm{d}f_{(1,1)}$:

$$f(x,y) = (\,\sin(xy)\,,\, xe^{-(x^2+y^2)}\,)\ .$$

Exercice 5 : Dérivées partielles secondes I
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\[2ex] \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, mais pas de classe C^2.

Exercice 6 : Dérivés partielles secondes II
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier l'existence et la valeur de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur. Quelle est la classe de f ?

Exercice 7 : Extrema I
Trouver les points critiques sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3 \ , \quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy \ , \quad f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy \ , \quad f(x,y) = xe^y + ye^x$$

Discuter leur nature.

Exercice 8 : Extrema II
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

1. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $g_k(x)$ définie par $g_k(x) = f(x, kx)$ admet un minimum local en 0.
2. La fonction f admet-elle un minimum local en $(0,0)$?

Exercice 9 : Divergence et rotationnel
Un champ de vecteurs différentiable sur $\mathbb{R}^2$ est la donnée d'une fonction dérivable

$$V \ : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \longmapsto \ V(x,y) = (V_1(x,y), V_2(x,y)) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

La divergence et le rotationnel d'un champ V sont donnés par

$$\operatorname{div}(V) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}(V) = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \ .$$

Calculer la divergence et le rotationnel des champs de vecteurs suivants. Dessiner les champs de vecteurs et interpréter les résultats.

$V(x,y) = (x/\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ y/\sqrt{x^2+y^2})$ (champ divergent)
$V(x,y) = (-y, x)$ (tourbillon) $V(x,y) = (1, \cos x)$ (transport parallèle)