ÉQUATION AUX VARIATIONS

Correction partielle

---

7. Il s'agit de montrer que pour tous t et h, $\theta_{-h}(t) = -\theta_h(t)$. Intuitivement c'est clair, cela signifie juste que la trajectoire du pendule lâché à vitesse nulle à un angle $-h$ de la verticale doit être symétrique de celle du pendule lâché avec un écartement initial égal à h ! Vérifions-le rigoureusement. Soit $h \in \mathbb{R}$. Par définition (cf. **1.**), θ_{-h} est l'unique solution de

$$(*)\begin{cases} x'' + \sin x = 0 \\ x(0) = -h,\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Pour montrer que $\theta_{-h} = -\theta_h$, il suffit donc de vérifier que $-\theta_h$ est solution de $(*)$. La vérification est immédiate :

- $(-\theta_h)'' + \sin(-\theta_h) = -(\theta_h'' + \sin\theta_h) = 0$ car θ_h est solution de (E) ;
- $(-\theta_h)(0) = -\theta_h(0) = -h$ et $(-\theta_h)'(0) = -\theta_h'(0) = 0$ par définition de θ_h.

Ainsi, à t fixé, $h \mapsto \Phi(t,h)$ est impaire, donc dans tout DL de cette fonction, les coefficients d'ordre pair sont tous nuls. En particulier, $v_2(t)$ est nul. Ceci étant vrai pour tout t, v_2 est identiquement nulle. L'expression (2) se simplifie donc en :

$$\theta_h(t) = \Theta(t,h) = hv_1(t) + h^3v_3(t) + h^4z(t,h).$$

8. On procède comme dans à la question **5.** On a d'une part, en dérivant l'expression ci-dessus deux fois par rapport à t (à h fixé) :

$$\theta_h''(t) = hv_1''(t) + h^3v_3''(t) + h^4\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(t,h) = hv_1''(t) + h^3v_3''(t) + o(h^3) \tag{3}$$

et d'autre part, θ_h étant solution de (E),

$$\begin{aligned} \theta_h''(t) &= -\sin(\theta_h(t)) = -\sin\left(hv_1(t) + h^3v_3(t) + o(h^3)\right) \\ &= -\left(hv_1(t) + h^3v_3(t) + o(h^3)\right) + \frac{1}{6}\underbrace{\left(hv_1(t) + h^3v_3(t) + o(h^3)\right)^3}_{\frac{1}{6}h^3v_1(t)^3 + o(h^3)} + o\left(h^3\right) \\ &= -v_1(t)h + \left(-v_3(t) + \frac{1}{6}v_1(t)^3\right)h^3 + o(h^3). \end{aligned} \tag{4}$$

Quelque soit t, l'unicité du DL à l'ordre 3 de $\theta_h''(t)$ en la variable h entraîne donc :

$$\begin{cases} v_1''(t) + \sin v_1(t) = 0 \quad \text{(on le savait déjà)} \\ v_3''(t) = -v_3(t) + \frac{1}{6}v_1(t)^3, \text{ i.e. } \quad v_3''(t) + v_3(t) = \frac{1}{6}v_1(t)^3 = \frac{(\cos t)^3}{3} \quad \text{d'après } \mathbf{6.} \end{cases}$$

La fonction v_3 est donc solution de l'équation linéaire non homogène d'ordre 2 : $y'' + y = \frac{(\cos t)^3}{3}$ $(**)$. Déterminons les conditions initiales satisfaites par v_3 :

$$\begin{aligned} \theta_h(0) = h &\quad \text{par définition de } \theta_h \\ &= v_1(0)h + v_3(0)h^3 + h^4z(0,h) \text{ d'après (2) (en } t = 0) \end{aligned}$$

donc par unicité du DL à l'ordre 3 de $\theta_h(0)$ en la variable h, $v_3(0) = 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \theta_h'(0) = 0 &\quad \text{par définition de } \theta_h \\ &= v_1'(0)h + v_3'(0)h^3 + h^4\frac{\partial z}{\partial t}(0,h) \text{ par dérivation de (2) par rapport à } t \end{aligned}$$

donc par unicité du DL à l'ordre 3 de $\theta_h(0)$ en la variable h, $v_3'(0) = 0$.

Pour déterminer v_3, on utilise maintenant la méthode de variation de la constante. L'équation linéaire homogène associée à $(**)$, $y'' + y = 0$, a pour base de solution $(t \mapsto \cos t, t \mapsto \sin t)$. On cherche alors v_3 sous la forme $t \mapsto a(t)\cos t + b(t)\sin t$. Une telle fonction est solution de $(**)$, avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$, si et seulement si (cf cours/TD) les fonctions a et b satisfont :

$$\begin{cases} a'\cos + b'\sin = 0 \\ a'(-\sin) + b'\cos = \frac{\cos^3}{6} \\ (a\cos + b\sin)(0) = 0, \quad \text{i.e } a(0) = 0 \\ (a\cos + b\sin)'(0) = 0, \quad \text{i.e } (\underbrace{a'\cos + b'\sin}_{0} - a\sin + b\cos)(0) = 0, \quad \text{i.e } b(0) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\cos^3}{6} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\cos^3}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\cos^3}{6} \\ \frac{\cos^4}{6} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$a(t) = \int_0^t -\sin s \frac{\cos^3(s)}{6} ds \quad \text{et} \quad b(t) = \int_0^t \frac{\cos^4(s)}{6} ds,$$

ce qui, après calcul, donne :

$$a(t) = \frac{1}{24}\left(\cos^4(t) - 1\right) \quad \text{et} \quad b(t) = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{8}t + \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{\sin(4t)}{8}\right),$$

et donc :

$$v_3(t) = ... = \frac{\sin t}{16}\left(t + \frac{\sin(2t)}{6}\right)$$

et finalement :

$$\theta_h(t) = h\cos t + h^3 \frac{\sin t}{16}\left(t + \frac{\sin(2t)}{6}\right) + o(h^3).$$