TD 6 : Exemples.

Exercice 1 : Une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque notée $\|\cdot\|$, on note S la sphère unité de $\|\cdot\|$.

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\mathcal{N}_{\|\cdot\|}(A) = \max\limits_{x\in S}\|Ax\|$. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle cette norme la norme *subordonnée* à $\|\cdot\|$.
2. Montrer que l'on a de plus $\mathcal{N}(AB) \leqslant \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$.
3. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ n'est pas une norme subordonnée. On pourra considérer la matrice dont tous les coefficients valent 1, et son carré.
4. Exprimer $\mathcal{N}_{\|\cdot\|}(A)$ en fonction des coefficients de A dans le cas où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 : Un espace de fonctions. On considère $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.
2. En considérant la famille de fonctions $(x \longmapsto x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, montrer que E est de dimension infinie.
3. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]}(|f(x)|)$.
   (a) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E.
   (b) Quelle est la boule unité, la sphère unité de $\|\cdot\|_\infty$?
   (c) Pour f dans E, écrire avec des quantificateurs que $g \in B_{\|\cdot\|_\infty}(f,\varepsilon)$. Représenter schématiquement les graphes de f et g.
   (d) Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de E telle que $f_n \underset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f$. Justifier l'expression : f_n *converge uniformément vers* f.
4. Pour toute fonction $f \in E$, on pose maintenant $\|f\|_1 = \int_0^1(|f(t)|dt$. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E.
5. En considérant la suite de fonctions $(x \longmapsto x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, montrer que les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
6. Montrer que l'application $f \in E \mapsto f(0)$ est linéaire, continue pour E muni de $\|\cdot\|_\infty$, mais pas pour E muni de $\|\cdot\|_1$.

Exercice 3 : Continuité du déterminant.

1. Montrer que l'application $\det : \mathrm{M_n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.
2. Soit $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n. Montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ est un ouvert.
3. Soit (M_k) une suite convergente de matrices telles que pour tout k, il existe un vecteur x_k tel que $M_k x_k = 0$. Montrer que la limite de la suite (M_k) n'est pas inversible.
4. Montrer que $\mathrm{SL_n}(\mathbb{R})$ est un fermé.

Exercice 4 : Compacité de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On définit le groupe orthogonal

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}); {}^tMM = I_n\}.$$

1. Montrer que l'application $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tMM \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est continue (on précisera la norme considérée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$).
2. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que si C_i, $i = 1, \ldots, n$, désignent les colonnes d'une matrice M de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker, valant 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$).
4. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné, pour une norme de votre choix.
5. Conclure quant au titre de l'exercice.

Exercice 5 : Différentiabilité du déterminant
On se place dans $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$, et pour tout couple (k, l) d'entiers inférieurs à n, on note $E_{k,l}$ la matrice qui a tous ses coefficients nuls, sauf son coefficient (k, l), qui vaut 1. Autrement dit, $E_{k,l} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ (symbole de Kronecker).

1. Montrer que $(E_{1,1}, \ldots, E_{1,n}, E_{2,1}, \ldots, E_{2,n}, \ldots, E_{n,n})$ forme une base de $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$. On note $(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}, x_{2,1}, \ldots, x_{2,n}, \ldots, x_{n,n})$ les coordonnées dans cette base.
2. Pour tout (k, l), déterminer
$$\lim_{t \to 0} \frac{(\det(I_n + tE_{k,l}) - \det(I_n))}{t}.$$
En déduire les dérivées partielles de l'application $\det : \mathrm{M_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ au point I_n de $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$.
3. Étant donne $H \in M_n(\mathbb{R})$, que vaut la différentielle de det en I_n appliquée à H, $D\det_{I_n}(H)$?

Exercice 6 : Première utilisation de la définition abstraite de différentiabilité. Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leq \|x\|^2$. Montrer que f est différentiable en 0 et donner sa différentielle.

Exercice 7 : Différentiabilité de la norme. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ n'est pas différentiable en 0 (*indication* : penser aux dérivées directionnelles).
2. Si $\|.\|$ est une norme euclidienne, montrer que $\|.\|^2 : E \to \mathbb{R}$ est différentiable en tout point, que $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ est différentiable en tout point sauf 0, et exprimer leur différentielle en termes du produit scalaire sur E.
3. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ où $\|.\|$ est différentiable pour $\|.\| = \|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.