MM049 **2011-2012**
Université Paris 6

Étude qualitative globale

Exercice 1. Modèle de Lotka-Volterra. On considère le système différentiel

$$(E) \quad (x,y)' = X(x,y) \quad \text{avec} \quad X : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to \quad \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto \quad (x(k-ay), y(bx-l)), \end{cases}$$

où a, b, k et l sont des paramètres strictement positifs.

1. Déterminer l'unique solution constante du système.
2. Dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, représenter les quatre régions suivantes :

$$R_1 = \{(x,y) : X(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*\} \quad ; \quad R_2 = \{(x,y) : X(x,y) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*\}$$
$$R_3 = \{(x,y) : X(x,y) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^*\} \quad ; \quad R_4 = \{(x,y) : X(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*\}.$$

   Dessiner l'allure du champ de vecteurs X sur les frontières entre ces régions.
3. Trouver des fonctions φ et $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que toute solution $(x,y) : I \to (\mathbb{R}_+^*)^2$ de (E) satisfasse l'équation
$$x'\varphi(x) = y'\psi(y).$$
4. En déduire une fonction $V : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour toute solution $(x,y) : I \to (\mathbb{R}_+^*)^2$, la fonction $t \in I \mapsto V(x(t), y(t))$ soit constante. On dit que V est une intégrale première de (E) (indépendante du temps).
5. Montrer que les niveaux de V sont des compacts.
6. En déduire que toutes les solutions maximales de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.
7. Montrer qu'elles sont toutes périodiques.
   Indication : soit $(x_1, y_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(x,y) : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}_+^*)^2$ la solution maximale de conditon initiale (x_1, y_1) en $t = 0$. Montrer qu'il existe $t_1 < t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x(t_1) = x(t_2) = \frac{l}{b}$ et $y(t_1)$, $y(t_2) \in [0, \frac{k}{a}]$. Utiliser alors l'intégrale première pour montrer que $y(t_1) = y(t_2)$.

Exercice 2. Application de premier retour au voisinage d'une orbite périodique. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système différentiel :

$$(E) \quad (x,y)' = X(x,y) \quad \text{avec} \quad X : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto \quad (-y,x) + (1-x^2-y^2)(1+\lambda x^2)(x,y). \end{cases}$$

1. Montrer que la solution maximale de condition initiale $(1,0)$ en $t = 0$ reste dans le cercle unité pour tout temps (on pourra utiliser le théorème de redressement ou de la "boîte de flot"). En déduire explicitement cette solution.
2. Montrer que toute solution maximale de condition initiale située dans le disque unité est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Écrire l'équation (E) en coordonnées polaires là où cela a un sens.

Pour $u > 0$, on note $P(u)$ l'absisse du premier point où la solution issue de $(u,0)$ (en $t = 0$) retraverse l'axe des x (si un tel point existe). L'application P s'appelle *application de premier retour*.

4. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que P soit bien définie sur $]0, 1+\varepsilon[$.

5. D'après la question 3, la solution issue de $(u, 0)$ est de la forme $t \mapsto \rho(u,t)e^{it}$. On note $f(t) = \frac{\partial \rho}{\partial u}(1,t)$. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire. Préciser la condition initiale.
6. Quel est le lien entre P et ρ ?
7. Déduire de ce qui précède la valeur de $P'(1)$. Que signifie géométriquement ce nombre ?

Exercice 3. Modèle "proie-prédateur" réaliste. On considère le système différentiel

$$(E) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

avec

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\left(1 - x - \frac{ay}{x+c}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & by\left(1 - \frac{y}{x}\right) \end{cases};$$

où a, b et c sont des paramètres strictement positifs.

1. Montrer que ce système admet une unique solution stationnaire (i.e constante).

On fixe dorénavant $a = 1$, $b = c = 0,1$. On va montrer que dans ce cas le système admet une ou plusieurs solutions périodiques vers lesquelles tendent les autres solutions.

2. ** Montrer que la solution stationnaire est instable.
3. Dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, représenter les courbes C_f et C_g d'équations respectives

$$f(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad g(x,y) = 0,$$

puis les régions

$$R_1 = \{(x,y) : f(x,y) > 0 \text{ et } g(x,y) > 0\} \quad ; \quad R_2 = \{(x,y) : f(x,y) < 0 \text{ et } g(x,y) > 0\}$$
$$R_3 = \{(x,y) : f(x,y) < 0 \text{ et } g(x,y) < 0\} \quad ; \quad R_4 = \{(x,y) : f(x,y) < 0 \text{ et } g(x,y) > 0\}.$$

Dessiner l'allure du champ de vecteurs le long des frontières entre ces régions.

Pour tout $\alpha \in]0,1[$ proche de 1, on note
- A_α et B_α les points d'intersection de la droite verticale $\{x = \alpha\}$ avec C_f et C_g respectivement ;
- E_α le point d'intersection entre C_g et la droite horizontale passant par A_α ;
- D_α le point d'intersection entre C_f et la droite verticale passant par E_α.

4. Dessiner l'allure du champ de vecteurs le long des segments $A_\alpha B_\alpha$, $E_\alpha A_\alpha$, $D_\alpha E_\alpha$ et le long de la demi-droite horizontale Δ issue de B_α vers la gauche.
5. ** Montrer que, pour α assez proche de 1, il existe $C_\alpha \in \Delta$ tel que le champ de vecteurs le long du segment $C_\alpha D_\alpha$ pointe vers l'intérieur du domaine K délimité par le polygône $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha E_\alpha$.
6. Dans cette situation, montrer que toute trajectoire passant en un temps t_0 par un point de K reste dans K pour tout $t \geq t_0$.
7. Montrer que pour tout point $p \in K$, l'ensemble limite $\omega(p)$ est bien défini, non vide et compact.

On admet le théorème de Poincaré–Bendixson :

Théorème 1 (Poincaré–Bendixson)**.** *Un ensemble ω-limite non vide compact ne contenant pas de point d'équilibre d'un champ de vecteurs C^1 sur un ouvert du plan est une orbite périodique (i.e l'image d'une solution périodique).*

8. En déduire que (E) admet une solution pérodique.