MM049 **2011-2012**
Université Paris 6

Champs de vecteurs autonomes du plan

On considère un champ de vecteurs X défini sur le plan, suffisamment régulier pour que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, et complet : il existe donc un flot $(\Phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$, qui est un sous-groupe à un paramètre de difféomorphismes du plan, tel que, pour tout x, t,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi^t(x) = X(\Phi^t(x)).$$

On appelle *zéro du champ* X un point P du plan tel que $X(P) = 0$. On rappelle que, pour tout point P, l'ensemble $\omega(P)$ est l'ensemble des points qui sont limite d'une suite $\Phi^{t_n}(P)$ avec $\lim(t_n) = +\infty$.

I. Théorème de Poincaré-Bendixson : arguments graphiques

On propose de montrer que si la trajectoire d'un point reste dans un compact donné, alors elle s'accumule sur un zéro du champ ou sur une orbite périodique. Plus précisément :

Théorème. *Soit P un point du plan. Supposons qu'il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $t \geq 0$, $\Phi^t(P) \in K$. Alors ou bien l'ensemble ω-limite $\omega(P)$ contient un zéro du champ X, ou bien $\omega(P)$ est une orbite périodique.*

Pour l'instant, on veut juste comprendre par des dessins quels sont les comportements possibles pour l'orbite de P. Les arguments seront détaillés et formalisés dans la partie suivante. On se place sous les hypothèses du théorème.

On considère un point $Q \in \omega(P)$ qui n'est pas un zéro du champ.

1. Dessiner une “boîte à flot” autour de Q, c'est-à-dire un ouvert donné par le théorème de redressement sur lequel le champ est difféomorphe à un champ constant. La trajectoire de $\{\Phi^t(P), t \geq 0\}$ doit passer une infinité de fois dans cette boîte à flot, et s'accumuler sur Q : dessiner la portion de trajectoire entre deux passages successifs, puis entre trois passages successifs. Quelle contrainte observe-t-on ?
2. On oublie provisoirement le point P, pour se concentrer sur la trajectoire de Q, que l'on suppose non périodique. Soit $Q' \in \omega(Q)$, on suppose que Q' n'est pas un zéro du champ. Dessiner une boîte à flot en Q', puis une portion de trajectoire de Q passant deux fois dans cette boîte à flot. On prend maintenant un point R très proche de Q. Dessiner le début de la trajectoire de R. “Montrer” qu'elle ne peut pas repasser près du point Q. En déduire que *le point Q n'est dans l'ensemble omega-limite d'aucun point.*
3. En se souvenant que $Q \in \omega(P)$, quelle est la conclusion ? Que reste-t-il à “montrer” ?

II. Détails du raisonnement

On admet le théorème de Jordan : *Soit* $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ *une* ***courbe fermée simple*** *(on dit aussi une courbe de Jordan), c'est-à-dire une application continue, injective sur* $[0, 1[$*, avec*

$\gamma(0) = \gamma(1)$. *Alors l'ensemble complémentaire* $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0,1])$ *a exactement deux composantes connexes* O, O', *et* $\gamma([0,1]$ *est la frontière de chacune d'elles.* [1] Autrement dit, on a une partition

$$\mathbb{R}^2 = O \sqcup \gamma([0,1]) \sqcup O'$$

où les ensembles O, O' sont des ouverts connexes.

Question préliminaire. Dans la situation du théorème de Jordan, soit A un point de O et $t > 0$ tel que $\Phi^t(A)$ est dans O'. Montrer qu'il existe $t_0 \in]0, t[$ tel que $\Phi^{t_0}(A) \in \gamma([0,1])$. *Indication : utiliser la connexité de l'intervalle* $[0, t]$.

On considère d'abord un point Q quelconque (plus loin on supposera $Q \in \omega(P)$, mais au début le point P de l'énoncé n'intervient pas).

On se donne aussi une transversale Σ au champ, fournie par le théorème de redressement : $\Sigma = \Psi(\{0\}\times] - \varepsilon, \varepsilon[)$, ou Ψ est un difféomorphisme de $] - \varepsilon, \varepsilon[^2$ sur un ouvert U du plan qui envoie le champ constant $(1,0)$ sur le champ X.

1. Supposons que l'orbite positive de Q,

   $$\mathcal{O}^+(Q) := \{\Phi^t(Q), t \geq 0\}$$

   rencontre Σ en deux points distincts. Montrer que $\mathcal{O}^+(Q) \cup \Sigma$ contient une courbe de Jordan γ. Montrer que l'une des deux composantes connexes O' du complémentaire de γ est *positivement invariante* : pour tout $A \in O'$ et tout $t \geq 0$ on a $\Phi^t(A) \in O'$.
2. Déterminer la position de $\Phi^t(Q)$ en fonction de t, relativement à la partition $\mathbb{R}^2 = O \sqcup \gamma([0,1]) \sqcup O'$.
3. Montrer que si R est un point assez proche de Q, alors il existe $T > 0$ tel que $\Phi^T(R) \in O'$. En déduire que $Q \notin \omega(R)$, puis que Q n'est dans l'ensemble ω-limite d'aucun point du plan. Par contrapposée, on a montré que *si Q est dans l'ensemble ω-limite d'un point du plan, alors l'orbite positive de Q rencontre toute transversale en au plus un point.*
4. On considère maintenant un point P comme dans l'énoncé du théorème. En déduire que si Q est un point de $\omega(P)$, alors $\omega(Q)$ est inclus dans l'ensemble des zéros de X, ou alors l'orbite de Q est périodique.
5. Montrer que $Q \in \omega(P) \Rightarrow \omega(Q) \subset \omega(P)$. Que conclue-t-on ? Que reste-t-il à montrer ? (voir la dernière partie de cet énoncé).

III. Intermède : exemples

Pour toutes ces questions, on pourra se contenter, en guise de réponse, d'un dessin.

1. Donner un exemple de champ de vecteurs X pour lequel pour tout point P, $\omega(P) = \emptyset$.
2. Donner un exemple de champ de vecteurs X avec un zéro qui est l'ensemble omega-limite de tout point.
3. Donner un exemple de champ de vecteurs X avec un zéro, et pour lequel toute les autres orbites sont périodiques.
4. Donner un exemple de champ de vecteurs X avec un zéro P_0, une seule orbite périodique $\mathcal{O}$, et pour lequel $\omega(P) = \mathcal{O}$ pour tout $P \neq P_0$.
5. Donner un exemple de champ de vecteurs X avec un seul zéro, et un point dont l'ensemble omega-limite est la réunion de deux droites.

---

1. Ce théorème n'a rien d'évident. Par contre, c'est une conséquence facile de la théorie de l'homologie. Voir par exemple Hatcher, *Algebraic topology*, disponible sur le web.

IV. Application de premier retour

Soit Ψ un difféomorphisme, fourni par le théorème de redressement, entre $]-\varepsilon,\varepsilon[^2$ et un ouvert U du plan, qui envoie le champ constant $(1,0)$ sur le champ X. On note

– $\Sigma = \Psi\left(\{0\}\times\left[-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right]\right)$, Σ est donc une courbe transverse au champ de vecteurs,

– $\mathrm{Int}\Sigma = \Psi(\{0\}\times]-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}[)$,

On se donne un point Q_0 du plan et un temps $t_0>0$ tel que $\Phi^{t_0}(Q_0)$ appartienne à $\mathrm{Int}\Sigma$. Soit $V=\Phi^{-t_0}(U')$.

1. Montrer qu'on peut définir une fonction continue $\tau : V\to\mathbb{R}$ telle que, pour tout $Q\in V$, $\Phi^{\tau(Q)}(Q)\in\mathrm{Int}\Sigma$. (Quelle est la régularité de la fonction τ ?)

On suppose maintenant que $Q_0\in\mathrm{Int}\Sigma$, et que t_0 est le *premier retour* de $\Phi^t(Q_0)$ sur Σ, ce qui signifie que

$$t_0=\mathrm{Inf}\{t>0 \mid \Phi^t(Q_0)\in\Sigma\}.$$

On va montrer qu'il existe un voisinage W de Q_0 dans $\mathrm{Int}\Sigma$ tel que $Q\in W$, le nombre $\tau(Q)$ est aussi le premier retour de Q sur Σ.

2. Montrer que si $Q\in\Sigma$ et $\Phi^t(Q)\in\Sigma$ avec $t>0$, alors $t\geq 2\varepsilon$.
3. Conclure par l'absurde en considérant une suite (Q_n) tendant vers Q_0.
4. Montrer que *l'application de premier retour* définie par $F(Q)=\Phi^{\tau(Q)}(Q)$ est un homéomorphisme de W sur $F(W)$.

NB : toute cette partie est en fait valable en dimension quelconque.

V. Orbite périodique (semi-) attractive

Le but de cette partie est de montrer que *si $\omega(P)$ contient une orbite périodique $\mathcal{O}(Q_0)$, alors* $\omega(P)=\mathcal{O}(Q_0)$. Pour ceci, on va considérer l'application de premier retour sur une transversale au point Q_0 ; le comportement des orbites du flot au voisinage de Q_0 est lié au comportement des orbites (discrètes) de l'application F.

On suppose maintenant que Q_0 est un point périodique du flot, on note T_0 sa période. On reprend les notations de la partie précédente. On commence par traiter le **cas simple** où $Q_0=(0,0)$, et $\Sigma=\{0\}\times\left[-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right]$ (on peut même supposer que le difféomorphisme Ψ est l'identité). Dans ce cas, l'application de premier retour F s'écrit

$$F(0,y)=(0,f(y))$$

où f est définie sur un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}$, et f est un homéomorphisme entre X et $f(W)$. Pour $y\in W$, on considère la suite

$$f(y),f^2(y),\dots$$

des itérés de y. Cette suite s'arrête dès que l'un des éléments est hors de W. Lorsque la suite $(f^n(y))_{n\geq0}$ est bien définie, on peut considérer *l'ensemble ω-limite* de y qui est défini comme l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite ; on le note $\omega(y)$.

5. Que vaut $f(0)$?
6. On suppose maintenant que le point Q_0 appartient à l'ensemble $\omega(Q)$ pour un point Q du plan qui n'est pas sur l'orbite de Q_0. Montrer qu'il existe $y\in W$ tel que $0\in\omega(y)$.
7. Montrer que dans ce cas, $\omega(y)=0$. *On pourra commencer par le cas où f est croissante, et montrer que dans ce cas la suite $(f^n(y))_{n\geq0}$ est monotone.*
8. En déduire que $\omega(Q)=\mathcal{O}(Q_0)$.

9. Reprendre tout le raisonnement dans le **cas général** pour finir de montrer le résultat voulu.
10. (optionnel) Montrer que $\omega(Q') = \mathcal{O}(Q_0)$ pour tout Q' assez proche de Q, et aussi pour tout Q' assez proche de $\mathcal{O}(Q_0)$.