MM049 **2011-2012**
Université Paris 6

Linéarisation (ou pas) d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe

On dit qu'un nombre irrationnel α satisfait une *condition de Cremer* de degré d si $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ satisfait :

$$(C_d) \qquad \limsup_{q\to\infty} \frac{\ln\ln(|\lambda^q - 1|^{-1})}{q} > \ln d.$$

Cette condition signifie que α est "très bien approché par des nombres rationnels", en un sens que nous ne préciserons pas plus...

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 (Cremer)**.** *Si α satisfait (C_d) avec $d \geq 2$, pour tout polynôme de degré d de la forme*

$$f : z \mapsto \lambda z + ... + a_d z^d,$$

tout voisinage de 0 *contient une infinité d'orbites périodiques de f. En particulier, f n'est pas (biholomorphiquement ou même topologiquement) conjugué à sa partie linéaire $\omega \mapsto \lambda\omega$.*

0. En quoi la seconde affirmation du théorème est-elle un corollaire de la première ?

Dorénavant, α désigne un nombre irrationnel satisfaisant une condition de Cremer de degré $d \geq 2$. Nous allons nous restreindre au cas où f est un polynôme de la forme

$$f : z \mapsto \lambda z + a_2 z^2 + ... + z^d \quad (a_d = 1).$$

Disons simplement que le cas général se déduit "facilement" de ce cas particulier par changement de coordonnées (dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$). Un point périodique de f de période $q \in \mathbb{N}^*$ est un nombre complexe z tel que $f^q(z) = z$. Autrement dit, c'est un point fixe de f^q.

1. Montrer que les points fixes de f^q sont les zéros d'un polynôme de la forme
$$z^{d^q} + ... + (\lambda^q - 1)z.$$
Que vaut le produit des racines non nulles de ce polynôme ?
2. En déduire que, si $|\lambda^q - 1| < 1$, il existe au moins un point fixe z_q de f^q satisfaisant
$$0 < |z_q| < |\lambda^q - 1|^{1/d^q}.$$
3. Montrer, en utilisant la condition (C_d) satisfaite par λ, qu'il existe $\epsilon > 0$ et une suite $(q_n)_n$ d'entiers tendant vers $+\infty$ tels que
$$|\lambda^{q_n} - 1|^{1/d^{q_n}} < \exp(-e^{\epsilon q_n}).$$
4. En déduire que f a des points périodiques non nuls dans tout voisinage de 0. Peut-on conclure quant au théorème 1 ?
5. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que
$$|f(z)| < e^{\epsilon}|z| \quad \text{pour tout } z \text{ satisfaisant } |z| < \delta,$$
puis que pour tout $q \in \mathbb{N}$,
$$|f^k(z)| < \delta \quad \text{pour tout } k \in [\![1, q]\!] \text{ et tout } z \text{ tel que } |z| < e^{-\epsilon q}\delta.$$
6. En déduire que pour n assez grand, *tous les points* de l'orbite de z_{q_n} sont de module inférieur à δ. Conclure.