Corrigé Seconde Session

Juin 2018

Exercice 1 : Sous-groupes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{S}^1$

1.a. Cours.

1.b. Soit A un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ et $B \subset A$. Par définition, il existe une application injective de A dans $\mathbb{N}$. Sa restriction à B est alors elle aussi injective, ce qui prouve que B est dénombrable.

1.c. Soit A un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$. Si un élément $x \in A$ est dans l'intérieur de A, alors A contient une boule ouverte (donc un intervalle ouvert) contenant x (donc non vide). Mais un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est non dénombrable (car en bijection avec $\mathbb{R}$, si on ne veut pas admettre ce résultat), donc ne peut être un sous-ensemble de l'ensemble dénombrable A d'après la question précédente. Ainsi, A n'a pas de point intérieur.

2. Soit $G = \beta\mathbb{Z}$ un sous-groupe monogène de $\mathbb{R}$, avec $\beta \neq 0$. $\beta\mathbb{Z}$ est en bijection avec $\mathbb{Z}$, donc dénombrable, donc d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$ d'après la question précédente. Son complémentaire est une union d'intervalles ouverts, donc c'est un fermé de $\mathbb{R}$. Enfin il n'est pas borné (par caractère archimédien de $\mathbb{R}$ si on veut être pédant), donc pas compact.

3.a. Cours.

3.b $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ (vérification immédiate) non monogène. En effet, il n'est pas trivial, et s'il existait $\beta \neq 0$ tel que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = \beta\mathbb{Z}$, alors on aurait en particulier $1 = 1 + 0 \cdot \alpha \in \beta\mathbb{Z}$ (donc β de la forme $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) et $\alpha = 0 + 1 \cdot \alpha \in \beta\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse sur α.

D'après le résultat admis de l'introduction, $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est donc dense dans $\mathbb{R}$.

4. $(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto k + l\alpha \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est surjective (en fait une bijective mais ce n'est pas utile ici) et $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable (cours) donc il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}^2$ et par composition, il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, ce qui prouve que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Il est dense dans $\mathbb{R}$ (donc son adhérence est $\mathbb{R}$) mais n'est pas tout $\mathbb{R}$ (il est dénombrable), donc il diffère de son adhérence, donc n'est pas fermé.

Il est dénombrable donc d'intérieur vide, mais n'est pas vide, donc il n'est pas ouvert.

5. Si c'était le cas, il induirait un homéomorphisme entre $[0, 1[\setminus\{\frac{1}{2}\}$ et $\mathbb{S}^1 \setminus \{p(\frac{1}{2})\}$, ce qui est impossible car le premier n'est pas connexe par arcs alors que le second oui. On peut aussi donner un argument de compacité.

6. (Cela marche aussi pour des espaces topologiques non métriques) Il s'agit de vérifier que tout ouvert non vide de Y rencontre $f(A)$. Soit V un tel ouvert. f étant continue, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X, et f étant surjective, cet ouvert est non vide. Par densité de A dans X, on a alors $A \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$, et a fortiori $\varnothing \neq f(A \cap f^{-1}(V)) \subset f(A) \cap V$, ce qu'on voulait.

Si f n'est pas supposée surjective, la conclusion est fausse en général (prendre une fonction constante avec $Y = \mathbb{R}$ par exemple). Si f n'est pas supposée continue, à nouveau la conclusion est fausse en général : prendre la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\{0,1\}$ valant 0 sur $\mathbb{Q}$ et 1 sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

7. Si $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$, O_α est fini, donc compact (toujours vrai dans un espace séparé).

Si $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, on remarque que O_α est l'image par p, continue et surjective, de $\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$, dense dans $\mathbb{R}$, donc d'après la question précédente, O_α est dense dans $\mathbb{S}^1$.

Dans les deux cas, O_α est dénombrable (comme image d'un ensemble dénombrable par une application quelconque) et on peut montrer comme dans $\mathbb{R}$ que tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{S}^1$ est d'intérieur vide (on peut aussi procéder à la main).

8. O_α est d'intérieur vide dans $\mathbb{S}^1$ donc pour tout $z \in O_\alpha$, il existe $(z_n)_n \in (\mathbb{S}^1 \setminus O_\alpha)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers z. Soit maintenant $z' \in C_\alpha \setminus \{0\}$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in O_\alpha$ tel que $z' = rz$. Alors $(rz_n)_n$, avec $(z_n)_n$ comme ci-dessus, est une suite de $\mathbb{C}\setminus C_\alpha$ convergeant vers z', donc z' n'est pas intérieur à C_α. Par ailleurs, si $\omega \notin O_\alpha$, $(\frac{\omega}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ fournit une suite de $\mathbb{C}\setminus C_\alpha$ convergeant vers 0, donc 0 n'est pas non plus intérieur à C_α, qui est donc d'intérieur vide.

On montre la densité dans $\mathbb{R}^2$ de façon similaire en utilisant celle de O_α dans $\mathbb{S}^1$, et on en déduit que l'adhérence de C_α est $\mathbb{R}^2$.

9. C_α est connexe par arcs comme réunion de sous-ensembles connexes par arcs (une demi-droite est convexe) d'intersection commune non vide.

Soient maintenant z et z' deux éléments de $C_\alpha \subset \{0\}$ appartenant à deux demi-droites distinctes, et supposons qu'il existe un chemin reliant z à z' dans C_α, de la forme $t \in [0,1] \mapsto r(t)e^{i2\pi\theta(t)}$ (cf. énoncé). Alors θ est un chemin continu reliant $\theta(0)$ et $\theta(1)$, qui sont distincts, donc d'après le TVI, $\theta([0,1])$ contient l'intervalle d'intérieur non vide compris entre $\theta(0)$ et $\theta(1)$. Ceci est incompatible avec le fait que $\theta([0,1]) \subset \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ (puisque $\gamma([0,1]) \subset C_\alpha \setminus \{0\}$) et que $\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ est d'intérieur vide.

Ceci prouve non seulement que C_α n'est pas connexe, mais que deux demi-droites ouvertes distinctes appartiennent à deux composantes connexes distinctes. Comme ces demi-droites sont elles-mêmes connexes par arcs, les c.c. par arcs le C_α sont donc précisément les demi-droites ouvertes.

Exercice 2 : Un espace de suites

I.1. Tout d'abord, si $(u_n)_n$ est un élément de $\mathcal{S}_0$, $(|u_n|)_n$ est une suite positive qui tend vers 0 donc est majorée, donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est un réel positif. Donc $\|\cdot\|_\infty$ définit une application de $\mathcal{S}_0$ dans $\mathbb{R}_+$.

Séparation. Soit $u = (u_n)_n \in \mathcal{S}_0$. Si $\|u\|_\infty = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le |u_n| \le 0$ par définition du sup, donc $(u_n)_n$ est la suite nulle, i.e. le vecteur nul de $\mathcal{S}_0$.

Homogénéité. Soit $u = (u_n)_n \in \mathcal{S}_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\|\lambda u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda u_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda|\,|u_n| = |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = |\lambda|\|u\|_\infty.$$

Inégalité triangulaire. Soient $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n \in \mathcal{S}_0$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n + v_n| \le |u_n| + |v_n| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k| + \sup_{k\in\mathbb{N}} |v_k|$$

par définition du sup, donc par définition du sup à nouveau :

$$\|u+v\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n+v_n| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k| + \sup_{k\in\mathbb{N}} |v_k| = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

Ainsi, $\|\cdot\|_\infty$ définit bien une norme sur $\mathcal{S}_0$.

I.2. Non d'après le théorème de Riesz car $\mathcal{S}_0$ est de dimension infinie.

I.3. Cours.

I.4. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{S}_0$ (attention ! Ici, u_k est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, pas un réel). Commençons par montrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement, i.e. qu'il existe une suite réelle u telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite réelle $(u_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $u(n)$. Soit $\varepsilon > 0$. $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k, l \geq K, \quad \|u_k - u_l\|_\infty \leq \varepsilon.$$

En particulier, par définition de $\|\cdot\|_\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall k, l \geq K, \quad |u_k(n) - u_l(n)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi la suite $(u_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge (on admet la complétude de $\mathbb{R}$) vers un réel que l'on note $u(n)$. Or pour ε et K comme ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall k, l \geq K, \quad |u_k(n) - u_l(n)| \leq \varepsilon,$$

donc par passage à la limite quand $l \to +\infty$,

$$\forall k \geq K, \quad |u_k(n) - u(n)| \leq \varepsilon,$$

et ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall k \geq K, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_k(n) - u(n)| \leq \varepsilon$$

Reste donc seulement à montrer que la suite u a pour limite 0. Pour cela on reprend l'avant-dernière inégalité, vraie pour $k = K$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Comme u_K a pour limite 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_K(n)| \leq \varepsilon$. On a alors :

$$\forall n \geq N, \quad |u(n)| \leq |u(n) - u_K(n)| + |u_K(n)| \leq 2\varepsilon.$$

On a ainsi montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u(n)| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui signifie que u tend vers 0.

I.5.a. Le fait que c'est un sous-espace vectoriel est immédiat (il est inclus dans $\mathcal{S}_0$, la suite nulle lui appartient, et une somme ou un multiple réel d'une suite nulle à partir d'un certain rang est nul(le) à partir d'un certain rang).

Pour la densité, il s'agit de montrer que pour toute suite u de $\mathcal{S}_0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v \in \mathcal{P}$ telle que $\|u - v\|_\infty < \varepsilon$. Or pour u et ε comme ci-dessus, u tend vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Si l'on définit v comme la suite coïncidant avec u jusqu'au rang N et nulle après, on a bien

$$\|u - v\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n - v_n| = \sup_{n>N} |u_n - v_n| = \sup_{n>N} |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

I.5.b. $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{S}_0$ mais n'est pas $\mathcal{S}_0$ tout entier ($(\frac{1}{n+1})_n$ appartient au complémentaire) donc il n'est pas fermé dans $\mathcal{S}_0$, donc ne peut pas être complet (prendre une suite dans

$\mathcal{P}$ convergeant dans $\mathcal{S}_0$ mais pas dans $\mathcal{P}$; elle est pourtant de Cauchy dans $\mathcal{P}$ muni de la norme induite).

II.1. Si $a = (a_n)_n$ est bornée, pour tout $u \in \mathcal{S}_0$, $T_a(u) = au \in \mathcal{S}_0$ (le produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers 0 tend vers 0).

On montre la réciproque par contraposée. Supposons que a n'est pas bornée. Elle admet alors une sous-suite $(a_{\varphi(k)})_n$ telle que $(|a_{\varphi(k)}|)_k$ tend vers $+\infty$. Quitte à extraire à nouveau on peut supposer que cette sous-suite ne s'annule pas. Considérons alors la suite u définie par $u_n = 0$ si $n \notin \varphi(\mathbb{N})$ et $u_{\varphi(k)} = \frac{1}{a_{\varphi(k)}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cette suite tend vers 0, i.e appartient à $\mathcal{S}_0$, mais $T_a(u)$ a une sous-suite constante égale à 1, donc n'appartient pas à $\mathcal{S}_0$, ce qui conclut.

II.2. La linéarité de T_a est immédiate. Pour tout $u \in \mathcal{S}_0$,

$$\|T_a(u)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\,|u_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \times \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \times \|u\|_\infty$$

donc T_a est continue et $|||T_a||| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

Montrons l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| - \varepsilon$. Si u est la suite $(\delta_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$, de norme 1, on a alors $\|T_a(u)\|_\infty = |a_k|$ (seul terme (éventuellement) non nul) $\geq (\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| - \varepsilon)\|u\|_\infty$, donc $|||T_a||| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| - \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien la seconde inégalité voulue et finalement $|||T_a||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

II.3. T_a est injective ssi son noyau est trivial i.e. ssi $T_a(u) = 0 \implies u = 0$, ou encore ssi

$$\forall u \in \mathcal{S}_0, \quad (\forall n \in \mathbb{N}, a_n u_n = 0) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0).$$

Cette assertion est vraie ssi a ne s'annule pas (si a ne s'annule pas, l'implication est clairement vraie pour tout u, et si a s'annule, une suite u nulle partout sauf pour un indice où a s'annule donne un exemple où l'implication est fausse). Ainsi, T_a est injective ssi a ne s'annule pas.

II.4. Si a ne s'annule pas, toute suite v nulle à partir d'un certain rang est de la forme $T_a(u)$ avec $u = (\frac{v_n}{a_n})_n$ (qui appartient bien à $\mathcal{S}_0$ puisqu'elle aussi nulle apcr), donc $\mathcal{P}$ est inclus dans l'image de T_a. Comme $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{S}_0$ d'après I.4, l'image de T_a l'est aussi a fortiori.

II.5. L'application $\|\cdot\|_a : \mathcal{S}_0 \to \mathbb{R}_+$ est bien définie. La linéarité de T_a entraîne directement l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Reste la séparation. Puisque, $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{S}_0$, pour avoir

$$\forall u \in \mathcal{S}_0, \quad \|u\|_a = \|T_a(u)\|_\infty = 0 \implies u = 0,$$

il faut et il suffit que

$$\forall u \in \mathcal{S}_0, \quad T_a(u) = 0 \implies u = 0,$$

i.e. que T_a soit injective.

II.6. Si $\alpha := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \neq 0$, on a en fait $\alpha > 0$, et en particulier a ne s'annule pas, donc l'unique antécédent éventuel d'un élément v de $\mathcal{S}_0$ est $u = (\frac{v_n}{a_n})_n$. Il s'agit donc juste de vérifier que si $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \neq 0$, lorsque v tend vers 0, la suite u ainsi définie aussi, ce qui est immédiat puisque $|u_n| \leq \frac{1}{\alpha}|v_n|$ pour tout n.

II.7. Procédons par contraposée. Si $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = 0$, soit a s'annule, soit elle admet une sous-suite partout non nulle convergeant vers 0. Dans le premier cas, T_a ne peut être surjective car toute suite de son image s'annule en tous les indices où a s'annule, or ce n'est pas le cas de toute suite tendant vers 0. Dans le second cas, si φ désigne l'extraction correspondante, alors tout $v = T_a(u)$ appartenant à l'image satisfait $v_{\varphi(k)} = a_{\varphi(k)}u_{\varphi(k)} = o(a_{\varphi(k)})$, avec $(a_{\varphi(k)})_k$ tendant vers 0. Mais il existe toujours des suites tendant moins vite vers 0 ! (prendre par exemple la suite v définie par $v_n = 0$ si $n \notin \varphi(\mathbb{N})$ et $v_{\varphi(k)} = a_{\varphi(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).

II.8. Pour l'homéomorphisme, il ne reste plus qu'à montrer que $(T_a)^{-1}$ est continue, mais d'après ce qui précède, $(T_a)^{-1} = T_{a^{-1}}$, avec $a^{-1} = (\frac{1}{a_n})_n$ suite bornée (sa valeur absolue est majorée par $1/\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$, le dénominateur étant supposé non nul), de sorte que $T_{a^{-1}}$ est continue d'après II.2.

On a en outre, $\forall u \in \mathcal{S}_0$, $\|u\|_a = \|T_a(u)\|_\infty \leq |||T_a||| \cdot \|u\|_\infty$ et

$$\|u\|_\infty = \|T_{a^{-1}}(T_a(u))\|_\infty \leq |||T_{a^{-1}}||| \cdot \|T_a(u)\|_\infty = |||T_{a^{-1}}||| \cdot \|u\|_a,$$

ce qui prouve l'équivalence des normes.

Exercice 3 : Théorème de Cauchy-Lipschitz affine

I.1. Il s'agit de justifier que si y est une fonction continue de $[0, b]$ dans $\mathbb{R}$, $T(y) : t \in [0, b] \mapsto 1 + \int_0^t y(s)ds \in \mathbb{R}$ aussi, ce qui est bien le cas car T est par définition l'unique primitive de y valant 1 en 0 (elle est donc en fait C^1).

Soient $y, z \in E$. On veut comparer $\|T(y) - T(z)\|_\infty$ à $\|y - z\|_\infty$. Pour tout $t \in [0, b]$,

$$\begin{aligned} |T(y)(t) - T(z)(t)| &= \left| \int_0^t (y(s) - z(s)) \, \mathrm{d}s \right| \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &\leq \int_0^t |y(s) - z(s)| \, \mathrm{d}s \quad \text{(par croissance de l'intégrale)} \\ &\leq \int_0^t \|y - z\|_\infty \, \mathrm{d}s \quad \text{(idem)} \\ &= t\|y - z\|_\infty \leq b\|y - z\|_\infty. \end{aligned}$$

T est donc b-lipschitzienne.

I.2. Cours.

I.3. D'après 1., T est contractante. Comme $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach (énoncé), donc en particulier complet, le théorème de Banach-Picard s'applique et fournit l'existence et l'unicité de y et la convergence de $(T^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ vers y dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, pour tout $z \in E$.

I.4. Tout d'abord, une fonction y sur $[0, b]$ satisfait $y(0) = 1$ et $y' = y$ si et seulement si y est son unique primitive valant 1 en 0, i.e. si et seulement si $T(y) = y$. La question précédente fournit l'existence et l'unicité d'une telle fonction.

On applique ensuite la seconde partie de la question précédente à la fonction z constante égale à 1 : on vérifie par récurrence que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} = (T^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$, et on obtient donc la convergence uniforme voulue.

II.1.a. Par analogie avec I.1., il suffit de justifier que si $y : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ est continue, l'intégrande $t \in [a, b] \mapsto A(t) \cdot y(t) + B(t) \in \mathbb{R}^k$ l'est aussi. Or on sait que A, B et y le sont, i.e. leurs composantes le sont, donc chaque composante de $A \cdot y + B$ l'est comme somme de produits de fonctions continues, ce qui signifie que $A \cdot y + B$ l'est.

II.1.b.Réponse identique à la première partie de I.5.

II.1.c. A est continue sur un compact donc bornée, i.e. qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $\|\!|A(t)|\!\| \leq C$. Le resultat voulu découle de la définition de la norme d'opérateur $\|\!|\cdot|\!\|$ associée à la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}$.

II.1.d. On procède comme en I.1. On ne peut rien conclure car si $C(b-a)$ n'est pas strictement inférieur à 1, on ne sait pas si T est contractante et donc le théorème de point fixe ne s'applique pas.

II.1.e. Soient $y, z \in E$. Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in [a,b], \quad \|T^p(y)(t) - T^p(z)(t)\| \leq \frac{(C(t-t_0))^p}{p!}\|y-z\|_\infty.$$

L'initialisation pour $p = 0$ est immédiate. Soit maintenant $p \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang p. Soient $y, z \in E$. Pour tout $t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
\|T^{p+1}(y)(t) - T^{p+1}(z)(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^t (A(s)\cdot T^p(y)(s) + B(s))\mathrm{d}s - \int_{t_0}^t (A(s)\cdot T^p(z)(s) + B(s))\mathrm{d}s\right\| \\
&= \left\|\int_{t_0}^t (A(s)\cdot(T^p(y)(s) - T^p(z)(s)))\,\mathrm{d}s\right\| \\
&\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\cdot(T^p(y)(s) - T^p(z)(s))\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{t_0}^t C\,\|T^p(y)(s) - T^p(z)(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&\leq C\int_{t_0}^t \frac{(C(t-t_0))^p}{p!}\|y-z\|_\infty \mathrm{d}s \quad \text{(par HR)} \\
&= \frac{(C(t-t_0))^{p+1}}{(p+1)!}\|y-z\|_\infty.
\end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence, et entraîne en particulier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|T^p(y) - T^p(z)\|_\infty \frac{(C(b-a))^p}{p!}\|y-z\|_\infty,$$

ce qu'on voulait. Or pour tout réel α, la suite $(\frac{\alpha^p}{p!})_p$ tend vers 0 (TG d'une série convergente), donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que T^p est contractante, et on peut alors appliquer la généralisation du théorème de point fixe et conclure comme dans la partie 1.

II.2. I s'écrit comme union dénombrable croissante de segments J_n contenant t_0. Ce qui précède donne l'existence et l'unicité d'une solution y_n sur J_n pour chaque n. Mais comme $t_0 \in J_n \subset J_{n+1}$, par unicité, la restriction de y_{n+1} à J_n, qui est solution sur J_n, coïncide avec y_n. Autrement dit, y_{n+1} est un prolongement de y_n pour tout n. Ainsi, la fonction y définie sur I comme étant y_n en restriction à J_n est bien définie, et elle satisfait $(*)$ sur chaque J_n donc sur leur réunion.