Examen Seconde Session

Juin 2018

Les problèmes sont indépendants. S'il est conseillé, au sein d'un problème, de traiter les questions dans l'ordre, il est également possible de passer des questions et d'admettre leurs résultats dans les questions suivantes. Il est également possible (voire encouragé) d'abréger une réponse s'il s'avère qu'elle est très similaire à une réponse détaillée antérieurement.

Le symbole $*$ signale les questions plus subtiles ou plus longues. Les questions de type "cours" ne servent pas nécessairement à résoudre les questions qu'elles précèdent.

La clarté de la rédaction sera déterminante dans la notation.

Barème indicatif. exercice 1 : 7 points, exercice 2 : 8 points, exercice 3 : 5 points.

Dans tout le sujet, les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie sont munis de leur topologie usuelle d'espace vectoriel normé, indépendante de la norme.

On rappelle que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 qui s'identifie canoniquement à $\mathbb{R}^2$ (en identifiant, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x + iy \in \mathbb{C}$ à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$), et qui admet pour norme le module complexe $|\cdot|$ (notamment), qui s'identifie à la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^2$. On pourra utiliser librement (mais soigneusement) ces identifications dans la suite. On admet également que toute application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ est de la forme $t \mapsto r(t)e^{i2\pi\theta(t)}$ avec $r : [0, 1] \to \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues.

Exercice 1 : Sous-groupes de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{S}^1$

On admet dans cet exercice que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit monogène (de la forme $\beta\mathbb{Z}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$) soit dense dans $\mathbb{R}$.

1. (a) Rappeler la définition de point intérieur à une partie d'un espace topologique.
   (b) Justifier que tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
   (c) Justifier que tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que tout sous-groupe monogène non réduit à $\{0\}$ de $(\mathbb{R}, +)$ est un fermé de $\mathbb{R}$ non compact, d'intérieur vide.
3. (a) Rappeler la définition d'un sous-ensemble dense d'un espace topologique.
   (b) Justifier, à l'aide du résultat admis dans l'énoncé, que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Toujours pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est-il un ensemble dénombrable ? Un fermé de $\mathbb{R}$? Un ouvert ?

On considère l'application $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ par $p(x) = e^{2i\pi x} = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On admet qu'elle définit un morphisme de groupes surjectif (mais non injectif) de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{S}^1, \times)$, continu pour les topologies usuelles. On s'intéresse

5. L'application $p_{|[0,1[}$ induit-elle un homéomorphisme de $[0,1[$ dans $\mathbb{S}^1$ (munis des topologies induites correspondantes)?

6. Montrer que si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est une application continue et surjective d'un espace métrique dans un autre, l'image de tout sous-ensemble dense A de (X, d_X) est dense dans (Y, d_Y). Cela reste-t-il vrai si l'on enlève l'hypothèse de continuité ? de surjectivité ?

7. Montrer que le sous-groupe monogène $O_\alpha := \{e^{2i\pi n\alpha}, n \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{S}^1$ est

   – une partie compacte de $\mathbb{S}^1$ si $\alpha \in \mathbb{Q}$;
   – dense dans $\mathbb{S}^1$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (On pourra utiliser l'étude des sous-groupes de $\mathbb{R}$).

   Quel est son intérieur dans chacun des cas ?

On considère maintenant dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ le sous-ensemble $C_\alpha := \cup_{z \in O_\alpha} \mathbb{R}_+ z$, réunion des demi-droites issues de l'origine et passant par un point z de O_α.

8.* Déterminer l'intérieur et l'adhérence de cet ensemble.

9.* Montrer que C_α est connexe par arcs, mais que $C_\alpha \setminus \{0\}$ ne l'est pas. Quelles sont ses composantes connexes par arcs ?

Exercice 2 : Un espace de suites

Soit $\mathcal{S}_0$ l'espace vectoriel des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

I. 1. Démontrer soigneusement que $\| \cdot \|_\infty$ définit une norme sur $\mathcal{S}_0$.

2. La boule unité fermée de $(\mathcal{S}_0, \| \cdot \|_\infty)$ est-elle compacte ?

3. Rappeler la définition d'un espace métrique complet et d'un espace de Banach.

4.* Démontrer que $(\mathcal{S}_0, \| \cdot \|_\infty)$ est un espace de Banach. (On pourra éventuellement se rappeler qu'une suite réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, mais on n'admettra pas que l'espace des fonctions bornées d'un ensemble dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme, est un espace de Banach).

5. Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des suites $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, nulles à partir d'un certain rang (c'est-à dire, $v \in \mathcal{P}$ s'il existe $N \in \mathbb{N}$ (dépendant de v) tel que $v_n = 0$ pour tout $n \geq N$).

   (a) Démontrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel dense de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{S}_0, \| \cdot \|_\infty)$.
   (b) L'espace $\mathcal{P}$ muni de la norme induite par $\| \cdot \|_\infty$ est-il complet ?

II. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Pour tout élément u de $\mathcal{S}_0$, on note $T_a(u)$ la suite de réels définie par $(T_a(u))_n = a_n u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $T_a(u) \in \mathcal{S}_0$ pour tout $u \in \mathcal{S}_0$ si et seulement si la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

On suppose dans toute la suite que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on note $T_a \; : (\mathcal{S}_0, \| \; \|_\infty) \to (\mathcal{S}_0, \| \cdot \|_\infty)$ l'application ainsi définie et on définit, pour tout $u \in \mathcal{S}_0$, $\|u\|_a = \|T_a(u)\|_\infty$.

2. Montrer que T_a est une application linéaire continue. Calculer sa norme $|||T_a|||$ subordonnée à la norme $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathcal{S}_0$.
3. Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur a l'application T_a est-elle injective ?
4. Montrer que si a ne s'annule pas, son image est dense dans $\mathcal{S}_0$ (on pourra utiliser I.4).
5. Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur T_a l'application $\| \cdot \|_a : \mathcal{S}_0 \to \mathbb{R}_+$ est-elle une norme ?
6. Montrer que si $\inf_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \neq 0$, alors T_a est surjective (on pourra commencer par observer qu'elle est injective, et exprimer l'inverse explicitement).

7.* Réciproquement, montrer que si T_a est surjective, alors $\inf_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \neq 0$.

8. On suppose T_a bijective. Montrer qu'elle définit un homéomorphisme de $(\mathcal{S}_0, \| \cdot \|_\infty)$ dans lui-même et que les normes $\| \cdot \|_a$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 3 : Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

(ATTENTION ! L'objet de ce problème étant de démontrer le-dit théorème (énoncé ci-après), il ne doit bien sûr pas être supposé connu. De la même façon, dans la première partie, on ne suppose pas connue la fonction exponentielle.)

Partie I : Un cas particulier

Soit b un réel positif et $(E, \|\cdot\|_\infty)$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, b]$ à valeurs réelles, muni de la norme uniforme. On admet qu'il s'agit d'un espace de Banach. Soit T l'application de E dans E définie par:

$$\forall y \in E,\ \forall t \in [0, b], \quad (T(y))(t) = 1 + \int_0^t y(s)\ \mathrm{d}s.$$

1. Justifier que l'on a bien $T(y) \in E$ si $y \in E$ et montrer que l'application T est lipschitzienne de $(E, \| \cdot \|_\infty)$ dans lui-même (on fournira une constante de Lipschitz).
2. Énoncer le théorème du point fixe de Banach-Picard (sous sa forme complète, incluant le comportement des orbites).
3. On suppose désormais $b < 1$. Justifier qu'il existe une fonction y unique dans E telle que $T(y) = y$. Que dire de la convergence de $(T^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(E, \| \cdot \|_\infty)$, pour tout $z \in E$?
4. En déduire qu'il existe une unique fonction y dérivable sur $[0, b]$ telle que $y(0) = 1$ et $y' = y$, et qu'elle est limite uniforme sur $[0, b]$ de la suite constituée des fonctions polynomiales $P_n : t \mapsto \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Partie II : Théorème général

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant (où $\mathbb{R}^k$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque, et $M_k(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée $|||\cdot|||$ associée) :

Théorème (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \to M_k(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^k$ des applications continues et $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^k$. Alors le* problème de Cauchy

$$(*) \begin{cases} y'(t) = A(t) \cdot y(t) + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $y : I \to \mathbb{R}^k$.

1. On se restreint pour l'instant au cas $I = [a, b]$ avec $a < b \in \mathbb{R}$. E désigne dorénavant l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}^k$ et, pour $y \in E$, on note $\|y\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \|y(t)\|$ (la partie précédente traite donc du cas particulier $k = 1$, $\|\cdot\| = |\cdot|$, $a = 0$ et $b > 0$). On admet à nouveau que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

   Avec les notations du théorème, on définit

   $$T : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ y & \mapsto & T(y) : t \in [a, b] \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s) \cdot y(s) + B(s))ds \end{array}$$

   (on admet que la définition et les propriétés de l'intégrale de Riemann des fonctions à valeurs réelles se transposent de façon quasi-identique aux fonctions à valeurs vectorielles).

   (a) Justifier que T est bien définie.

   (b) Justifier que $y : I \to \mathbb{R}^k$ est solution de $(*)$ si et seulement si y est un point fixe de T.

   (c) Justifier qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^k$ et tout $t \in [a, b]$, $\|A(t) \cdot v\| \leq C\|v\|$.

   (d) Montrer que T est lipschitzienne de rapport $C(b - a)$. Peut-on conclure quant à l'existence d'une solution de $(*)$?

   On admet la généralisation suivante du théorème de Banach-Picard : *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante. Alors f admet un unique point fixe.*

   (e) Montrer que T^p est $\frac{(C(b-a))^p}{p!}$-lipschitzienne (on pourra commencer par majorer, pour $y, z \in E$, $\|T^p(y)(t) - T^p(z)(t)\|$ en fonction de $t \in [a, b]$, $p \in \mathbb{N}$ et $\|y - z\|_\infty$, à l'aide d'une récurrence). Conclure.

2. Déduire de ce qui précède le théorème dans le cas d'un intervalle I quelconque (que l'on pourra écrire judicieusement comme une réunion de segments).