Examen Première Session – Correction

Janvier 2019

Problème 1 : Homéomorphismes du segment

0.(a) (Cours) Un homéomorphisme entre (X, d_X) et (Y, d_Y) est une bijection de X sur Y qui est continue de (X, d_X) dans (Y, d_Y) et dont la bijection réciproque est continue de (Y, d_Y) dans (X, d_X).

0.(b) (Cours) L'application $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{S}^1$ (cercle unité de $\mathbb{R}^2$) définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ est bijective (cf. coordonnées polaires), continue ($[0, 2\pi[$ et $\mathbb{S}^1$ étant munis des distances induites par n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ resp.) car chaque composante l'est (classique) mais l'application réciproque ne l'est pas, car (par exemple), elle envoie $\mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\}$, connexe par arcs, sur $[0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$ qui ne l'est pas, ou encore car $\mathbb{S}^1$ est compact (fermé borné dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ evn de dimension finie) alors que son image par f^{-1}, $[0, 2\pi[$, ne l'est pas.

I. Caractérisation des éléments de $\mathcal{H}$

1. Les applications définies par $f(x) = x$ et $f(x) = 1-x$ conviennent. Elles sont bien continues, à valeurs dans $[0, 1]$, et satisfont $(f \circ f)(x) = x$ ce qui prouve qu'elles sont bijectives de $[0, 1]$ sur lui-même et égales à leur bijection réciproque, qui est donc continue.

2.(a) Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ satisfaisant $(\star)$. On peut invoquer directement le corollaire classique suivant du TVI : comme f est *continue* et *strictement monotone* sur l'intervalle $[0, 1]$, f est bijective de $[0, 1]$ sur $[f(0), f(1)]$ (si f croissante) ou $[f(1), f(0)]$ (si f décroissante), i.e. dans tous les cas sur $[0, 1]$.

On peut également redémontrer en une phrase ce corollaire : la stricte monotonie donne l'injectivité et le fait que f soit à valeurs dans $[0, 1]$, et la continuité sur un intervalle, avec le TVI, donne la surjectivité.

2.(b) On peut admettre qu'une bijection continue *entre intervalles* strictement monotone a une bijection réciproque (qui a nécessairement la même monotonie) continue, mais vue la formulation de l'énoncé, il n'est pas clair que ce soit admis.

On attend plutôt le fait qu'une bijection continue d'un espace métrique compact dans un autre espace métrique est automatiquement un homéomorphisme (car l'image réciproque d'un fermé F par f^{-1} est l'image directe de F, fermé dans un compact donc compact, par f, continue, donc elle-même compacte donc fermée).

3.(a) Δ est le triangle (fermé, avec son intérieur) délimité par l'axe des ordonnées, la droite d'équation $y = 1$ et la première bissectrice (d'équation $y = x$), privé de cette dernière. Il est convexe dans un evn (à justifier, attention aux inégalités larges ou strictes), donc connexe par arcs.

3.(b) $(x, y) \mapsto f(y)$ et $(x, y) \mapsto f(x)$ sont continues comme composées de fonctions continues (f et les projections), donc leur différence aussi, $(x, y) \mapsto y - x$ est linéaire en dimension finie donc continue, et ne s'annule par sur Δ, et finalement g est continue sur Δ comme quotient (bien défini) de fonctions continues.

La fonction g ne s'annule pas sur Δ puisque $f(x) \neq f(y)$ pour tout $(x, y) \in \Delta$ par injectivité de f. Or $g(\Delta)$ est connexe par arcs comme image d'un connexe par arcs par une application continue, donc c'est un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0, donc inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Dans tous les cas g est de signe contant sur Δ.

Si g est strictement positive (resp. négative), cela signifie que f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[0, 1]$. Dans tous les cas, f est strictement monotone sur $[0, 1]$.

3.(c) Si f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[0, 1]$, elle atteint en 0 son minimum (resp. maximum) et en 1 son maximum (resp. minimum). Or par hypothèse, $f([0, 1]) = [0, 1]$ donc son minimum et son maximum sont 0 et 1 respectivement, ce qui conclut.

Ainsi, si f induit un homéomorphisme de $[0, 1]$, f satisfait $(\star)$. Avec la question 2, cela montre finalement l'équivalence.

4. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in \mathcal{H}_+$, f fixe 0 et 1 et $f \in \mathcal{H}$ donc f est strictement monotone d'après 3, et donc nécessairement strictement croissante. Réciproquement, si f est strictement croissante et fixe 0 et 1, f appartient à $\mathcal{H}$ d'après 2, et donc évidemment à $\mathcal{H}_+$. La caractérisation attendue est donc : $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{H}_+$ si et seulement si f est strictement croissante et fixe 0 et 1.

II. Propriétés topologiques des parties $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_+$ de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$

A. Composantes connexes par arcs

1.(a) Un sous-ensemble C d'un ev E est convexe si pour tout $(x, y) \in E^2$, pour tout $t \in [0, 1]$ ($]0, 1[$ suffit en fait), $(1 - t)x + ty \in E$.

1.(b) Soient $f, g \in \mathcal{H}_+$ et $t \in]0, 1[$. Alors $(1 - t)f + tg$ est strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes (cf. I.4, en remarquant que $1 - t$ et $t > 0$), et $((1 - t)f + tg)(i) = (1 - t)f(i) + tg(i) = (1 - t)i + ti = i$ pour $i = 0$ et 1. Donc d'après I.4 à nouveau, $(1 - t)f + tg \in \mathcal{H}_+$.

2. Puisque L est linéaire (admis par l'énoncé), le fait que

$$\forall f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}), \quad |L(f)| = |f(0)| \le \|f\|_\infty = 1 \times \|f\|_\infty$$

prouve la continuité, et le fait que $|||L||| \le 1$. Comme en outre, pour la fonction $\tilde{1}$ constante égale à 1 (qui est bien continue), on a

$$|L(\tilde{1})| = |\tilde{1}(0)| = 1 = 1 \times \|\tilde{1}\|_\infty,$$

$|||L||| \ge 1$ et finalement $|||L||| = 1$.

3. Soit $\mathcal{C}$ une composante connexe par arcs de $\mathcal{H}$. $L_{|\mathcal{C}}$ est continue et à valeurs dans $\{0, 1\}$ d'après I.3, et $\mathcal{C}$ est connexe par arcs donc en particulier connexe, donc (cours) $L_{|\mathcal{C}}$ est constante.

4. Le complémentaire de $\mathcal{H}_+$ dans $\mathcal{H}$ est l'ensemble des applications de $\mathcal{H}$ (donc strictement monotones d'après I.3.b) qui ne fixent pas 0 ou 1, donc satisfont $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ d'après I.3.c, et sont donc strictement décroissantes. On a donc simplement $\mathcal{H}_+ = L_{|\mathcal{H}}^{-1}(\{0\})$ et $\mathcal{H}_- = L_{|\mathcal{H}}^{-1}(\{1\})$. Ainsi, $\mathcal{H}_+$ est connexe par arcs car convexe (1.b) et maximal pour cette propriété (puisque tout connexe par arcs de $\mathcal{H}$ est inclus soit dans $L_{|\mathcal{H}}^{-1}(\{0\})$, soit dans $L_{|\mathcal{H}}^{-1}(\{1\})$ d'après la question précédente), donc est une ccpa de $\mathcal{H}$, et même chose pour $\mathcal{H}_-$ (la convexité se montre exactement comme pour $\mathcal{H}_+$). Comme $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \cup \mathcal{H}_-$, on a bien déterminé toutes les ccpa de $\mathcal{H}$.

B. Adhérence, intérieur

1.(a) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes sur $[0, 1]$ convergeant uniformément vers f. Alors en particulier on a convergence simple. Soient $x \le y \in [0, 1]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \le f_n(y)$, inégalité (large) préservée par passage à la limite, de sorte que $f(x) \le f(y)$. Ainsi f est elle aussi croissante.

En revanche, la stricte croissance n'est pas préservée par passage à la limite (simple ou uniforme). Dessin montrant les graphes de fonctions de $\mathcal{H}_+$ (donc en particulier strictement croissantes) convergeant uniformément vers la fonction continue nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$ et affine de pente 2 sur $[\frac{1}{2}, 1]$ (pour cette question, on peut simplement considérer la suite de fonctions strictement croissantes $(\frac{1}{n}\mathrm{id}_{[0,1]})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer qu'elle CVU vers la fonction nulle, mais l'exemple un peu plus élaboré ci-avant nous servira aussi pour la question 1.(c)).

1.(b) (Cours) L'adhérence d'une partie A d'un espace métrique (E, d) est (par exemple) le plus petit fermé le contenant.

1.(c) La question 2.(a) nous dit que les fonctions croissantes (continues sur $[0, 1]$) forment un sous-ensemble fermé de $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Celles qui s'annulent en 0 également (c'est $\ker L = L^{-1}(\{0\})$, image réciproque d'un fermé par une application continue), et, par la même preuve, celles qui valent 1 en 1 aussi. Ainsi, $\mathcal{F}$ est fermé comme intersection de fermés. Par suite, comme $\mathcal{H}_+$ est inclus dans $\mathcal{F}$, par la question précédente, son adhérence l'est aussi.

1.(d) La fin de 2.(a) montre que $\mathcal{H}_+$ n'est pas fermé dans $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, donc $(\mathcal{H}_+, d_\infty)$ ne peut pas être complet (cours).

1.(a) Soit A une partie d'un espace métrique (E, d). Son intérieur est l'ensemble

$$\{a \in A : \exists\varepsilon > 0,\ B_d(a, \varepsilon) \subset A\}.$$

1.(b) On peut remarquer que $\mathcal{H}_+$ est inclus dans le sev strict $\ker L \subset C^0([0, 1], \mathbb{R})$, donc son intérieur est inclus dans celui de ce sev, et un sev strict dans un evn est toujours d'intérieur vide.

On peut aussi le retrouver à la main. Soit $f \in \mathcal{H}_+$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $f + \varepsilon/2$ appartient à $B_{d_\infty}(f, \varepsilon)$ mais pas à $\ker L$ donc pas à $\mathcal{H}_+$. Donc f n'est pas intérieur à $\mathcal{H}_+$.

2.(c) Avec les notations de la question et de la suggestion (de tels a et b existent par continuité de f, on peut même fixer $a = 0$), on définit g continue égale à f en dehors de $]a, b[$, et affine par morceaux (au nombre de deux) sur $[a, b]$, constante égale à $f(a)$ sur la première moitié (cela détermine complètement g). Cette fonction n'est bien sûr plus bijective donc n'appartient pas à $\mathcal{H}_+$, elle est toujours croissante et fixe 0 et 1 donc appartient à $\mathcal{F}$, et $\|f - g\|_\infty = \max_{[a,b]} |f - g|$ qui est par construction strictement inférieur à ε puisque pour tout $x \in [a, b]$, $f(x)$ et $g(x)$ appartiennent à $[f(a), f(b)]$, qui est de longueur $< \varepsilon$.

Ceci montre que $\mathcal{H}_+$ est d'intérieur vide dans $\mathcal{F}$.

C. Composition et application inverse

1. Le fait d'être à valeurs dans $[0, 1]$ (inégalités larges) est préservé par convergence simple, et a fortiori uniforme. Ensuite, avec les notations de l'énoncé : f est continue sur un segment donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\forall(x, y) \in [0, 1]^2$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Par CVU de $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ vers f et g, il existe en outre $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ et $\|g_n - g\|_\infty < \delta$. Soit alors $n \geq N$. Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}|(f_n \circ g_n)(x) - (f \circ g)(x)| &\leq |f_n(g_n(x)) - f(g_n(x))| + |f(g_n(x)) - f(g(x))| \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty + \varepsilon \leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ceci montre la convergence voulue dans $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$.

2.(a) Continuité de f^{-1} sur un segment et théorème de Heine à nouveau.

2.(b) Sous les hypothèses de la question, étant donné $x \in [0, 1]$, si $y = f(g^{-1}(x))$, $|g^{-1}(x) - f^{-1}(x)| = |f^{-1}(y) - f^{-1}(x)|$. Il suffit donc, vue la définition de δ, de vérifier que $|y - x| < \delta$, ce qui est vrai puisque $|y - x| = |f(g^{-1}(x)) - g(g^{-1}(x))| \leq d_\infty(f, g)$.

2.(c) On vient de montrer que

$$\forall f \in \mathcal{H}_+, \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall g \in \mathcal{H}_+,\ d_\infty(f, g) < \delta \Rightarrow d_\infty(f^{-1}, g^{-1}) < \varepsilon$$

(on rappelle que, $[0,1]$ étant compact, $d_\infty(f^{-1},g^{-1}) = \max_{[0,1]} |f^{-1}-g^{-1}|$), i.e. que l'application de l'énoncé est continue.

III. Une "meilleure" distance sur $\mathcal{H}_+$

1. d est bien définie et positive sur $(\mathcal{H}_+)^2$ puisque pour tout $(f,g) \in (\mathcal{H})^2$, $f-g$ et $f^{-1}-g^{-1}$ appartiennent à $C^0([0,1],\mathbb{R})$ sur lequel $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

Pour cette même raison,

$$\begin{aligned} d(f,g) = 0 &\Leftrightarrow \|f-g\|_\infty = \|f^{-1}-g^{-1}\|_\infty = 0 \quad \text{(positivité de } \|\cdot\|_\infty) \\ &\Leftrightarrow f = g \text{ et } f^{-1} = g^{-1} \text{(séparation de } \|\cdot\|_\infty) \\ &\Leftrightarrow f = g. \end{aligned}$$

La symétrie ($d(f,g) = d(g,f)$) est immédiate.

Enfin, l'inégalité triangulaire provient de celle de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$: pour tout $(f,g,h) \in (\mathcal{H}_+)^3$, $d_\infty(f,h) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$, et même chose avec les inverses, donc le max des deux, $d(f,h)$, est aussi majoré par $d(f,g)+d(g,h)$.

Pour l'équivalence topologique, il suffit par exemple de vérifier que toute suite convergeant pour l'une des distances converge pour l'autre. C'est clair dans le sens de d à d_∞ puisque $d_\infty \leq d$, et dans l'autre sens, cela découle de la continuité de l'application inverse.

2.(a) Cours.

2.(b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{H}_+, d)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N$, $d(f_n, f_m) < \varepsilon$, i.e. $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$ et $d_\infty(f_n^{-1}, f_m^{-1}) < \varepsilon$, ce qui montre bien que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $(\mathcal{H}_+, d_\infty)$.

2.(c) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{H}_+, d)$. D'après la question précédente, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $(\mathcal{H}_+, d_\infty)$, donc dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), d_\infty)$, qui est complet, donc elles convergent vers des éléments de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ que l'on note f et g respectivement, et qui sont encore à valeurs dans $[0,1]$. D'après II.C.1, $(f_n \circ f_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n^{-1} \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toutes deux constantes égales à $\mathrm{id}_{[0,1]}$ (abus de notation), convergent vers $f \circ g$ et $g \circ f$ respectivement, ce qui montre que f est continue bijective de $[0,1]$ sur lui-même, d'inverse g continue, donc appartient à $\mathcal{H}$. Comme f est croissante (II.B), cela montre que $f \in \mathcal{H}_+$, et la convergence pour d_∞ de $(f_n)_n$ et $(f_n^{-1})_n$ vers f et f^{-1} implique la convergence de $(f_n)_n$ vers f pour d, ce qui conclut.

2.(d) Si d et d_∞ étaient équivalentes, elles définiraient les même suites de Cauchy et les mêmes suites convergentes donc $(\mathcal{H}_+, d)$ et $(\mathcal{H}_+, d_\infty)$ seraient soit tous deux complets soit tous deux non complet, ce qui n'est pas le cas. Elles ne sont donc pas équivalentes.

Problème 2 : Deux (ou trois ?) topologies sur le "cube" $[-1,1]^{\mathbb{N}}$

A.1. Pour tout $u \in \ell^\infty$,

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ |u_k| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ u_k \in [-1,1] \\ &\Leftrightarrow u \in [-1,1]^{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

A.2.(a) Si c'était le cas, on pourrait extraire de $(e_n)_n$ une sous-suite convergente $(e_{\phi(n)})_n$. Mais quel que soit ϕ, tous les termes de cette sous-suite sont à distance uniforme 1 les uns des autres (les termes des suites $e_{\phi(n)}$ et $e_{\phi(m)}$ coïncident tous sauf ceux des rangs $\phi(n)$ et $\phi(m)$, où l'un est nul et l'autre égal à 1). En particulier, cette suite ne peut être de Cauchy, donc ne peut converger.

A.2.(b) $\mathcal{C}$ a une suite sans valeur d'adhérence pour $\|\cdot\|_\infty$, donc ce n'est pas une partie compacte de ℓ^∞. On peut également le déduire directement du théorème de Riesz, $\mathcal{C}$ étant la boule unité fermée d'un evn de dimension infinie.

B.1. C'est le théorème de Tychonoff : un produit d'espaces compacts (muni de la topologie produit) est compact.

B.2.(a) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un e.t. (E,τ) est convergente s'il existe $a \in E$ tel que

$$\forall U \in \tau \text{ contenant } a \text{ (ou "pour tout voisinage } U \text{ de } a \text{ dans } (E,\tau)\text{"}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in U.$$

B.2.(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Définissons $U_j = [-1,1]$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ différent de k et $U_k =]u(k)-\varepsilon, u(k)+\varepsilon[$. $U = \pi_{j\in\mathbb{N}} U_j$ est un ouvert de τ contenant u, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in U$, ce qui signifie précisément que $|u_n(k) - u(k)| < \varepsilon$, et montre donc la cv voulue (pour tout $k \in \mathbb{N}$).

B.2.(c) On suppose que $(u_n)_n$ converge vers u point par point. Soit U un ouvert de τ contenant u. D'après le rappel de l'énoncé, il contient un ouvert de la forme $U_0 \times \cdots \times U_j \times [-1,1]^{[\![j+1,+\infty[\![}$ contenant u, avec donc $U_0,\ldots,U_j$ ouverts de $[-1,1]$ contenant resp $u(0),\ldots,u(j)$. Comme $(u_n(k))_n$ tend vers $u(k)$ pour tout k compris entre 0 et j (ensemble *fini* d'indices), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, pour tout $k \in [\![0,j]\!]$, $u_n(k) \in U_k$. Comme on a en outre $u_n(k)$ qui appartient à $[-1,1]$ pour tout $n \geq N$, on a finalement $u_n \in U$ pour tout $n \geq N$, ce qui conclut sur la convergence de $(u_n)_n$ vers u dans $(\mathcal{C},\tau)$.

B.3. Convergence uniforme implique convergence simple est valable pour les suites comme pour les fonctions en général, donc une suite dans $\mathcal{C}$ qui converge dans ℓ^∞ (i.e. pour $\|\cdot\|_\infty$) converge point par point, donc dans $(\mathcal{C},\tau)$ d'après la question précédente.

La réciproque est fausse : la suite de A.2. converge point par point vers la suite nulle (l'écrire), mais pas uniformément (on a vu qu'elle n'avait pas de valeur d'adhérence pour $\|\cdot\|_\infty$).

C.1. Notons $\Phi : (u_k)_k \in \mathcal{C} \mapsto (\frac{u_k}{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Si $u \in \mathcal{C}$, $\Phi(u) \in E_2$ par comparaison à une série de Riemann convergente, et par définition, $d(u,v) = \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_2$. A partir de là, $\|\cdot\|_2$ étant une norme et Φ étant injective, la vérification de toutes les propriété d'une distance est automatique (mais à faire).

C.2.(a) On procède par "contraposée". Soit $v \in \mathbb{C}$ n'appartenant pas à l'ensemble de droite, ce qui signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|u_k - v_k| \geq (k+1)r$. Alors $d(u,v)^2 \geq \left(\frac{u_k - v_k}{k+1}\right)^2 \geq r^2$, donc $v \notin B_d(u,r)$.

C.2.(b) Soit $u \in U$. Étant donné $r > 0$, notons V_r l'ensemble de droite de la question précédente. Comme U_k est un ouvert de $[-1,1]$ contenant u_k pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe $r_k > 0$ tel que $]u_k - (k+1)r_k, u_k + (k+1)r_k[\cap [-1,1] \subset U_k$, et on vérifie que pour $r = \min_{k\in[\![0,j]\!]} r_k > 0$, $V_r \subset U$, et a fortiori $B_d(u,r) \subset U$ d'après la question préc"edente.

C.2.(c) Si $u_k = v_k$ pour tout $k \leq j$, $d(u,v)^2 \leq \sum_{k=j+1}^{+\infty} \frac{4}{(k+1)^2}$, reste à l'ordre j d'une série convergente, qui tend donc vers 0 quand j tend vers $+\infty$. Un j pour lequel ce reste est inférieur à $< (r/2)^2$ convient.

Pour un tel j, il s'agit maintenant d'assurer que si $v_k \in U_k$ pour tout $k \in [\![0,j]\!]$, $\sum_{k=0}^{j} \left(\frac{u_k - v_k}{k+1}\right)^2 < (r/2)^2$. Il suffit pour cela que chacun des termes de la somme soit strictement inférieur à $\frac{r^2}{4(j+1)}$, ce qui est assuré en prenant $U_k =]u_k - \frac{r}{2\sqrt{j+1}}, u_k + \frac{r}{2\sqrt{j+1}}[\cap [-1,1]$.

C.2.(c) 2.(b) montre que tout ouvert de τ est un ouvert de τ_d, et 2.(c) que toute boule ouverte pour d est un ouvert de τ (puisqu'elle contient un voisinage de chaque point pour τ), et donc aussi tout ouvert de τ_d, comme réunion de boules ouvertes. Les deux topologies coïncident donc.

C.3. Les deux topologies étant métrisables, il suffit de regarder leurs suites convergentes. Toute suite convergente pour τ_∞ converge pour τ et la réciproque est fausse, donc τ est (strictement) moins fine.