Examen Première Session

Janvier 2019

Les problèmes sont indépendants. S'il est conseillé, au sein d'un problème, de traiter les questions dans l'ordre, il est également possible de passer des questions et d'admettre leurs résultats dans les questions suivantes, qui peuvent par ailleurs, rétrospectivement, donner des indications sur les questions précédentes. Il est en tout cas fortement conseillé de parcourir l'intégralité d'un énoncé avant d'entamer la résolution.

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Lorsqu'une question demande de fournir un exemple, la réponse doit en particulier justifier que l'exemple qu'elle propose en est bien un.

Dans tout le sujet, les espaces vectoriels de dimension finie sont munis de leur topologie usuelle, et lorsque ce n'est pas précisé, un sous-ensemble d'un espace métrique est toujours supposé muni de la distance induite. S'il arrive qu'on parle de partie ouverte/fermée d'un ensemble ou d'application continue entre ensembles sans (re)préciser pour quelle(s) distance(s), c'est qu'on juge qu'il n'y a pas ambiguïté d'après le contexte.

Problème 1 : Homéomorphismes du segment

L'espace $C^0([0,1],\mathbb{R})$ est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, et de la distance associée d_∞. On admet que l'espace vectoriel normé ainsi défini est un espace de Banach.

On dit que $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ *induit* un homéomorphisme de $[0,1]$ si f est bijective de $[0,1]$ sur lui-même (donc en particulier à valeurs dans $[0,1]$) et que la bijection réciproque est continue, *i.e* si l'application

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est un homéomorphisme (où $[0,1]$ est muni de la distance induite par la valeur absolue). On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des éléments de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ qui induisent un homéomorphisme de $[0,1]$ et $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}$ le sous-ensemble de ceux ayant 0 et 1 pour points fixes. Étant donné $f \in \mathcal{H}$, on note f^{-1} la bijection réciproque de f vue comme bijection de $[0,1]$ dans lui-même.

0. (Question de cours préliminaire, indépendante du reste du problème)
   (a) Rappeler la définition générale d'un homéomorphisme entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y).
   (b) Donner un exemple de bijection continue entre deux espaces métriques qui n'est pas un homéomorphisme. Justifier votre réponse.

I. Caractérisation des éléments de $\mathcal{H}$

On se propose dans un premier temps de démontrer qu'un élément f de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{H}$ si et seulement si :

$$(\star)\begin{cases} f \text{ est strictement monotone} \\ f(\{0,1\}) = \{0,1\}. \end{cases}$$

1. Donner un exemple simple de $f \in \mathcal{H}$ satisfaisant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, puis un satisfaisant $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, en précisant l'application réciproque.

2. Justifier que si un élément f de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ satisfait $(\star)$,

   (a) f est bijective de $[0,1]$ sur lui-même,

   (b) la bijection réciproque est continue (on pourra, même si ce n'est pas indispensable, utiliser la compacité de $[0,1]$).

3. On suppose maintenant que f appartient à $\mathcal{H}$. On pose

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

   et on considère l'application

$$\begin{array}{cccc} g: & \Delta & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{f(y)-f(x)}{y-x}. \end{array}$$

   (a) Représenter Δ et justifier que c'est un sous-ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Montrer que g est continue, puis montrer qu'elle est de signe constant. Qu'est-ce que cela signifie pour f ?

   (c) Justifier que $f(\{0,1\}) = \{0,1\}$ et conclure.

4. Donner une caractérisation des éléments de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ qui appartiennent à $\mathcal{H}_+$ similaire à $(\star)$ (en termes de variations et d'images de 0 et 1).

II. Propriétés topologiques des parties $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_+$ de $C^0([0,1],\mathbb{R})$

A. Composantes connexes par arcs

1. (a) Rappeler la définition d'un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel.

   (b) Montrer que $\mathcal{H}_+$ est un sous-ensemble convexe de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ (on pourra utiliser I.4).

2. Montrer que l'application linéaire $L : f \mapsto f(0)$ est continue de $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et déterminer sa norme d'opérateur.

3. Justifier que L est constante sur chaque composante connexe par arcs de $\mathcal{H}$.

4. Décrire $\mathcal{H}_+$ et son complémentaire $\mathcal{H}_-$ dans $\mathcal{H}$ en termes de la restriction $L_{|\mathcal{H}}$. Montrer que les composantes connexes par arcs de $\mathcal{H}$ sont $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$.

B. Adhérence, intérieur

1. (a) Montrer que si f est limite uniforme d'une suite de fonctions croissantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, f est croissante. Ce résultat demeure-t-il vrai si l'on remplace "croissante(s)" par "strictement croissante(s)" ? On pourra justifier sa réponse à l'aide d'un dessin (clair).

   (b) Donner une définition de l'adhérence d'une partie d'un espace métrique.

   (c) Justifier que $\mathcal{F} = \{f \in C^0([0,1],\mathbb{R})\ ;\ f \text{ croissante, } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$ est un fermé de $C^0([0,1],\mathbb{R})$, et que l'adhérence de $\mathcal{H}_+$ dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ est incluse dans $\mathcal{F}$.

   (d) $\mathcal{H}_+$ est-il fermé dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$? $(\mathcal{H}_+, d_\infty)$ est-il complet ?

2. (a) Donner une définition de l'intérieur d'une partie d'un espace métrique.

   (b) Montrer que $\mathcal{H}_+$ est d'intérieur vide dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

   (c) Étant donné $f \in \mathcal{H}_+$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{H}_+$ tel que $d_\infty(f,g) < \varepsilon$ (on pourra considérer deux points $a < b$ de $[0,1]$ tels que $0 < f(b) - f(a) < \varepsilon$, et argumenter à l'aide d'un dessin clair). Que dire de l'intérieur de $\mathcal{H}_+$ dans $\mathcal{F}$?

C. Composition et application inverse

1. Montrer que si deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ convergent respectivement vers f et g dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}),d_\infty)$, alors g est encore à valeurs dans $[0,1]$ et $(f_n\circ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f\circ g$ dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}),d_\infty)$ (on pourra remarquer que pour tout $x\in[0,1]$,

$$(f_n\circ g_n)(x)-(f\circ g)(x)=(f_n(g_n(x))-f(g_n(x)))+(f(g_n(x))-f(g(x)))$$

   et utiliser, en la justifiant, l'uniforme continuité de f sur $[0,1]$).

2. Soit $f\in\mathcal{H}_+$ et $\varepsilon>0$.
   (a) Justifier qu'il existe $\delta>0$ tel que : $\forall(x,y)\in[0,1]^2$, $|x-y|<\delta\ \Rightarrow\ |f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|<\varepsilon$.
   (b) Montrer que, pour δ comme ci-dessus, si $g\in\mathcal{H}_+$ satisfait $d_\infty(f,g)<\delta$, alors pour tout $x\in[0,1]$, $|g^{-1}(x)-f^{-1}(x)|<\varepsilon$ (on pourra remarquer que $g^{-1}(x)=f^{-1}(y)$ avec $y=f(g^{-1}(x))$, puis que $x=g(g^{-1}(x))$.)
   (c) Que vient-on de montrer concernant l'application "inverse"

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{H}_+,d_\infty) & \to & (\mathcal{H}_+,d_\infty)\\ f & \mapsto & f^{-1}\end{array}\quad ?$$

III. Une "meilleure" distance sur $\mathcal{H}_+$

Pour tous $f,g\in\mathcal{H}_+$, on définit $d(f,g)=\max(\|f-g\|_\infty,\|f^{-1}-g^{-1}\|_\infty)$.

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathcal{H}_+$, topologiquement équivalente à d_∞ (on pourra raisonner en termes de suites convergentes).

2. (a) Rappeler la définition d'une suite de Cauchy dans un espace métrique et d'un espace métrique complet.
   (b) Vérifier que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{H}_+,d)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $(\mathcal{H}_+,d_\infty)$.
   (c) Montrer que $(\mathcal{H}_+,d)$ est complet. (On pourra utiliser II.C.1.)
   (d) Les distances d et d_∞ sont-elles équivalentes ?

Problème 2 : Deux (ou trois ?) topologies sur le "cube" $[-1,1]^{\mathbb{N}}$

On note E_∞ l'ensemble des suites réelles bornées et $E_2=\{(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,;\,(\sum_k u_k^2)\text{ converge}\}$. On admet que $\|\cdot\|_\infty : u\mapsto\sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k|$ et $\|\cdot\|_2 : u\mapsto\left(\sum_{k=0}^{+\infty}u_k^2\right)^{1/2}$ définissent des normes sur E_∞ et E_2 respectivement, on note ℓ^∞ et ℓ^2 les espace vectoriels normés $(E_\infty,\|\cdot\|_\infty)$ et $(E_2,\|\cdot\|_2)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $e_n=(\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite réelle dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui vaut 1.

A. On note $\mathcal{C}$ la boule unité fermée de ℓ^∞.

1. Montrer que $\mathcal{C}=[-1,1]^{\mathbb{N}}$.

2. (a) Montrer que la suite (de suites !) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence dans ℓ^∞.
   (b) $\mathcal{C}$ est-elle une partie compacte de ℓ^∞ ? Quel théorème permet de répondre directement à cette question ?

B. On munit maintenant $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit τ, chaque facteur $[-1,1]$ étant muni de la topologie usuelle (associée à $|\cdot|$). On rappelle que les ouverts de τ sont les réunions (quelconques) de sous-ensembles de la forme

$$U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_j \times [-1,1]^{[\![j+1,+\infty[\![} \subset [-1,1]^{\mathbb{N}}$$

où $j \in \mathbb{N}$ et $U_0, \ldots, U_j$ sont des ouverts de $[-1,1]$. Dans cette partie et la suivante, beaucoup de questions sont proches du cours. Il s'agit de redémontrer les résultat correspondants.

1. Justifier à l'aide d'un théorème que $(\mathcal{C},\tau)$ est un espace topologique compact.

2. (a) Rappeler la définition d'une suite convergente dans un espace topologique.

   (b) Montrer que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers u dans $(\mathcal{C},\tau)$, alors elle converge point par point : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(u_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(k)$.

   (c) Montrer la réciproque.

3. Montrer que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ converge dans ℓ^∞, elle converge dans $(\mathcal{C},\tau)$. Qu'en est-il de la réciproque ? (on pourra considérer une suite particulière déjà évoquée.)

C. Pour tout $u, v \in \mathcal{C}$, on pose

$$d(u,v) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u_k - v_k)^2}{(k+1)^2} \right)^{1/2} \in [0,+\infty].$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathcal{C}$ (on pourra écrire, pour tous $u, v \in \mathcal{C}$, $d(u,v)$ comme $\|u' - v'\|_2$ avec $u', v' \in E_2$).

2. (a) Soit $u \in \mathcal{C}$. Montrer que pour tout $r > 0$,

$$B_d(u,r) \subset (\,]u_0 - r, u_0 + r[\, \times \,]u_1 - 2r, u_1 + 2r[\, \times \cdots \times \,]u_k - (k+1)r, u_k + (k+1)r[\, \times \cdots) \cap \mathcal{C}$$

   (b) Étant donnés $j \in \mathbb{N}$ et $U_0,\ldots,U_j$ des ouverts de $[-1,1]$, on considère l'ouvert $U := U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_j \times [-1,1]^{[\![j+1,+\infty[\![}$ de τ. Montrer à l'aide de la question précédente que pour tout $u \in U$, il existe $r > 0$ tels que $B_d(u,r) \subset U$.

   (c) Réciproquement, soit $u \in \mathcal{C}$ et $r > 0$. Montrer qu'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $v \in \mathcal{C}$ satisfaisant $v_k = u_k$ pour tout $k \leq j$, $d(u,v) < r/2$.
   Montrer que pour un tel j, il existe des ouverts $U_0,\ldots,U_j$ de $[-1,1]$ tels que

$$u \in U_0 \times \cdots \times U_j \times [-1,1]^{[\![j+1,+\infty[\![} \subset B_d(u,r).$$

   (d) Qu'en déduit-on sur les topologies τ et τ_d (topologie associée à la distance d sur $\mathcal{C}$) ?

3. Comparer τ et la topologie τ_∞ associée à $\|\cdot\|_\infty$ (l'une est-elle plus fine que l'autre ?). (On pourra utiliser la question B.3.)