**Université Paris VI**
**LM 125 – Correction de la première session (Janvier 2010)**

**Question de cours :** voir cours

**Exercice 1 :**

1) La famille $(x_1, x_2, x_3)$ est libre si et seulement si son rang est 3. Or le rang de cette famille est 3 si et seulement si la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ admet un mineur d'ordre 3 non nul. Or le mineur d'ordre 3 obtenu à partir de $A$ en supprimant les deux dernières lignes est non nul. En effet

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

La famille $(x_1, x_2, x_3)$ est libre.

2) Le determinant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ est non nul. En effet

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

La famille $(x_1, x_2, x_3, (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1))$ est donc une base de $\mathbb{R}^5$ qui complète la famille libre $(x_1, x_2, x_3)$.

3) $Vect\,((0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1))$ est un supplémentaire de $Vect(x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathbb{R}^5$.

**Exercice 2 :**

1) La matrice de $\varphi_m$ dans la base canonique est

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 2 & 1 \\ 0 & m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule son déterminant en développant par rapport à la troisième ligne, puis par rapport à la deuxième ligne. On obtient :

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 2 & 1 \\ 0 & m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m^2 \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2(m-1).$$

2) L'application $\varphi_m$ est bijective si et seulement si $m$ est différent de 0 et de 1.

3) Nous devons distinguer trois cas:

*Premier cas :* $m \neq 0, 1$. L'application $\varphi_m$ est bijective. Comme elle est injective, son noyau est réduit au vecteur nul. Comme elle est surjective, son image vaut $\mathbb{R}^4$. La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est donc une base de $Im\varphi_m$.

*Deuxième cas m=0.*

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in Ker(\varphi_0) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y + 2z + t = 0 \\ 2z = 0 \\ x + t = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y = -t \\ z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$Ker(\varphi_0) = \{(x, x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = Vect\{(1, 1, 0, -1)\}.$$

Le vecteur $(1, 1, 0, -1)$ est une base de $Ker(\varphi_0)$.

Du théorème du rang, on déduit que $Im(\varphi_0)$ est de dimension 3. Les trois vecteurs $(0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0)$ et $(2, 2, 0, 0)$ sont dans $Im(\varphi_0)$ puisqu'ils sont les images des trois premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Il est facile de voir que la famille $((0,0,0,1),(1,0,0,0),(2,2,0,0))$ est libre. Comme c'est une famille libre de $Im\varphi_0$ qui est de dimension 3, c'est une base de $Im\varphi_0$.

*Troisème cas : m=1*

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in Ker(\varphi_1) &\iff \begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{l}x+y+2z+t=0\\ y+2z=0\\ z=0\\ x+t=0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l}y=z=0\\ x=-t\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$Ker(\varphi_1)=\{(x,0,0,-x)\mid x\in\mathbb{R}\}=Vect\{(1,1,0,-1)\}.$$

Le vecteur $(1,0,0,-1)$ est une base de $Ker(\varphi_1)$.

Du théorème du rang, on déduit que $Im(\varphi_1)$ est de dimension 3. Les trois vecteurs $(1,0,0,1),(1,1,0,0)$ et $(2,2,1,0)$ sont dans $Im(\varphi_1)$ puisqu'ils sont les images des trois premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrons que la famille $((1,0,0,1),(1,1,0,0),(2,2,1,0))$ est libre. Etant donnés trois réels $\alpha,\beta$ et $\gamma$, il est facile de voir que

$$\alpha(1,0,0,1)+\beta(1,1,0,0)+\gamma(2,2,1,0)=(0,0,0,0)\Longrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0.$$

Comme la famille $((1,0,0,1),(1,1,0,0),(2,2,1,0))$ est une famille libre de $Im\varphi_1$ qui est de dimension 3, c'est une base de $Im\varphi_1$.

**Exercice 3 :**

a) La matrice nulle est élément de $E$ donc $E$ est non vide.

Soient $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$ deux éléments de $E$ et $\lambda$ un réel. Les quatre relations suivantes sont donc satisfaites :

$$\begin{array}{l}a+b+c-d=0\\ a+2b+2c+d=0\\ a'+b'+c'-d'=0\\ a'+2b'+2c'+d'=0\end{array}$$

La matrice $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix}$ verifie alors les relations

$$\begin{gathered} (\lambda a + a') + (\lambda b + b') + (\lambda c + c') - (\lambda d + d') = 0 \\ (\lambda a + a') + 2(\lambda b + b') + 2(\lambda c + c') + (\lambda d + d') = 0 \end{gathered}$$

On a bien démontré que $E$ est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Résolvons le système

$$\begin{cases} a + b + c - d = 0 \\ a + 2b + 2c + d = 0 \end{cases}$$

par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} E &= \{\begin{pmatrix} 3d & -c-2d \\ c & d \end{pmatrix} \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (c,d) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont donc éléments de $E$ et elles engendrent $E$. De plus

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Ces deux matrices forment donc une famille libre. La famille $\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ forme donc une base de $E$ et l'espace vectoriel $E$ est de dimension 2.

**Exercice 4 :**

1) on a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

2) Calculons le polynôme caractéristique de $T$, $\chi_T$. On a

$$\chi_T(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-x & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} \frac{3}{2}-x & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-x \end{vmatrix} = (2-x)(2-x)(1-x).$$

Les valeurs propres de $T$ sont donc 2 et 1.

3) Déterminons le sous espace propre associé à chaque valeur propre et donnons en une base.

Calculons le sous espace propre associé à la valeur propre 1.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in Ker(T-Id) &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}
\end{aligned}$$

$$Ker(T-Id) = \{(0,y,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = Vect\left((0,1,1)\right).$$

La famille $((0,1,1))$ est une base de $Ker(T-Id)$.

Calculons le sous espace propre associé à la valeur propre 2.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in Ker(T-2Id) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \\
&\iff x = y + z
\end{aligned}$$

$$Ker(T-2Id) = \left\{(y+z,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{y(1,1,0) + z(1,0,1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

La famille $((1,1,0),(1,0,1))$ engendre $Ker(T-2Id)$. Montrons quelle est libre. Etant donnés $\alpha$ et $\beta$ deux réels, il est facile de voir que

$$\alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Donc la famille $((1,1,0),(1,0,1))$ est une base de $Ker(T-2Id)$.

3) Comme $dimKer(T-Id) + dimKer(T-2Id) = 3$, l'endomorphisme $T$ est diagonalisable et on obtient une base de vecteurs propres pour $T$ en mettant bout à bout une base de $Ker(T-Id)$ et une base de $Ker(T-2Id)$. Ainsi, la famille $(f_1 = (0,1,1), f_2 = (1,1,0), f_3 = (1,0,1))$ est une base de vecteurs propres pour $T$.

La matrice de $T$ dans la base $(f_1,f_2,f_3)$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5) On a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $P$ étant une matrice de passage, elle est inversible. Appliquons la méthode du pivot de Gauss pour calculer l'inverse de $P$ .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Ainsi $P$ est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

6) On a $B = P^{-1}AP$ d'où $A = PBP^{-1}$. On en déduit (par une démonstration par récurrence laissée au lecteur), $A^n = PB^nP^{-1}$.

On démontre par récurrence sur $n$ la formule $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Un calcul montre que : $A^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ -1+2^n & 1+2^n & 1-2^n \\ -1+2^n & 1-2^n & 1+2^n \end{pmatrix}$.