Nous sommes maintenant prêts, après cette mise en place de vocabulaire, comme dans $\mathbb{R}$, à nous intéresser aux notions de convergences, notamment de suites

§ 5 Convergence des suites

Dans tt ce §, (E,d) désigne un espace métrique.

Def suite dans E : comme dans $\mathbb{R}$, en remplaçant $\mathbb{R}$ par E !
sous-suite

Def Soit $(x_n)_n$ une suite dans E et $a \in E$. On dit que (x_n) cv vers a lorsque $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{d(x_n,a)}_{\text{suite réelle!}} = 0$ ie :

$$\forall \varepsilon>0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ d(x_n,a) < \varepsilon$$

Autrement dit $\quad \forall \varepsilon>0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N \quad x_n \in B(a,\varepsilon) \qquad (*)$

et ceci équivaut à : (def topologique) $\quad \boxed{\forall \text{ vois } V \text{ de } a, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ x_n \in V \quad (**)}$

(On a clairement $(**) \Rightarrow (*)$ puisque les boules ouvertes sont des vois de a et comme tt vois contient une boule ouverte, on a aussi $(*) \Rightarrow (**)$)

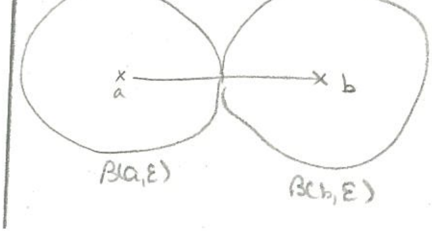
topo. gén.

Rq cette dernière def ne fait plus intervenir la distance (ou de façon cachée) mais seulement la notion de voisinage. Elle sera donc directement transposable pour les espaces topologiques généraux où on n'aura pas de distance !

Proposition : Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv ds E vers $a \in E$ alors la limite a est unique et l'on note $a = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

Rq Notons bien que la démo va utiliser la distance et pas slt la def abstraite de cv. Cette proposition sera fausse en général. C'est fou, non ?

Dem Soit $b \in E$ tq $b \neq a$. Alors $d(a,b)>0$. Notons $\varepsilon = \frac{d(a,b)}{2}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $d(x_n,a) < \varepsilon$ comme $B(a,\varepsilon) \cap B(b,\varepsilon) = \emptyset$,



$\forall n \geq N$, $x_n \notin B(b,\varepsilon)$. A fortiori (x_n) ne cv pas vers b ! $\square$

inégalité Δ

Rq La preuve repose sur le fait que deux points distincts d'un espace métrique possèdent des voisinages disjoints. Un espace topologique qui a cette propriété sera dit séparé. (II.20)

topo gén.

Les espaces métriques sont des espaces topologiques séparés mais il existe des espaces topologiques qui ne le sont pas, et ce ne sont pas juste des contre-exemples "exotiques". En général, l'espace des trajectoires d'un champ de vecteurs n'est pas séparé, et c'est un espace qu'il est naturel d'étudier !.

D'autres résultats sur $\mathbb{R}$ se généralisent :

Exo

exercice • Une suite convergente est bornée (⚠ à la def de "borné" pour un espace métrique général)

• toute sous-suite d'une suite convergente CV vers la même limite

Def On dit que $a \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} \mid d(x_n, a) < \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est infini

De façon équivalente :

a est une v.a de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\forall$ voisinage V de a, $\#\{n \in \mathbb{N},\ x_n \in V\} = +\infty$

(def topologique)

Exo

Prop a est une v.a. de $(x_n)_n$ ssi il existe une ss. suite de $(x_n)_n$ qui cv vers a

⚠ Ceci ne sera pas vrai en général. On ne peut pas le démontrer sans utiliser la distance. Ce sera vrai dans les espaces à bases dénombrables de voisinages.

Enfin, on verra dans le paragraphe suivant que :

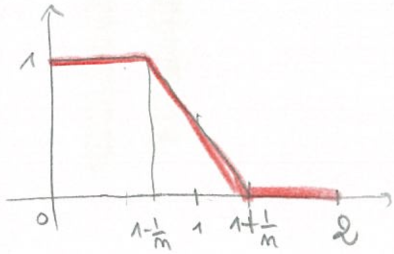
Prop L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé

Comme dans $\mathbb{R}$, il y a une autre notion clef de convergence : au sens de Cauchy.

Exo

En revanche, $\left(\overbrace{\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})}^{E}, \|\cdot\|_p\right)$ n'est pas complet pour $p \in [1,+\infty[$.

Considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
dans le cas $[a,b]=[0,2]$



"Agrandir" E de façon à le transformer en EVN complet justifie (et motive ?) la théorie de l'intégration de Lebesgue.

On va maintenant s'intéresser aux $\neq$ notions d'équivalence pour des distances. Avant ça, il nous faut observer que la topologie (ouverts, fermés) d'un espace métrique est complètement déterminée par ses suites convergentes :

Prop (caractérisation séquentielle de la topo des espaces métriques) Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Alors

A est un fermé de (E,d) $\iff$ $\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui cv dans (E,d), $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in A$

Rq l'implication $\Leftarrow$ ne sera pas vraie tout le temps en topologie générale.

Preuve $\Rightarrow$ Supposons A fermé et $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $a \in E$.
Si $a \notin A$, $a \in A^c$ qui est un ouvert, donc un voisinage de a, auquel aucun terme de la suite n'appartient ! Cela contredit la convergence.

$\Leftarrow$ Supposons que A n'est pas fermé, ie que A^c n'est pas ouvert, ie qu'il existe $a \in A^c$ tq $\forall \varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \not\subset A^c$, ie $B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
On peut donc construire une suite (x_n) d'éléments de A tq $\forall n$, $d(x_n,a) < \frac{1}{n+1}$, donc $\underset{\displaystyle \cap \atop A^{\mathbb{N}}}{(x_n)}$ cv vers $a \notin A$. Ceci prouve donc $\Leftarrow$ par contraposée. □

Equivalences de distance

Def • On dit que deux distances d_1 et d_2 sur E sont équivalentes si il existe des constantes $C, C' > 0$ tq $d_1 \leq C d_2$ et $d_2 \leq C' d_1$

• On dit que deux dist. d_1 et d_2 sur E sont topologiquement équivalentes si toute suite qui cv pour l'une cv pour l'autre.

ou de façon équivalente si tout fermé pour l'une est fermé pour l'autre,

ou encore si elles définissent les mêmes ouverts.

II.23

<u>Exo</u> Vérifier en utilisant la proposition précédente que les reformulations sont bien équivalentes à la définition.

<u>Exo</u> : - Vérifier que deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes (indication : avec les suites)

- Vérifier que si deux distances d_1 et d_2 sur E sont équivalentes,
  - toute suite de Cauchy pour l'une l'est pour l'autre
  - (E,d_1) est complet $\Longleftrightarrow$ (E,d_2) est complet
  - tout sous-ensemble borné pour l'une l'est pour l'autre.

Tout ceci n'est pas vrai si d_1 et d_2 sont seulement topologiquement équivalentes :

Sur $\mathbb{R}$, on considère : $d_1(x,y) = |x-y|$, $d_2(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$, $d_3(x,y) = |\arctan(x) - \mathrm{arcta}$

exo Toute suite convergeant pour l'une de ces distances converge pour les autres (<u>le vérifier !</u>). Les espaces $(\mathbb{R},d_1)$, $(\mathbb{R},d_2)$ et $(\mathbb{R},d_3)$ ont donc les mêmes ouverts.

En revanche :

- $(\mathbb{R},d_2)$ et $(\mathbb{R},d_3)$ sont bornés alors que $(\mathbb{R},d_1)$ ne l'est pas
- $(\mathbb{R},d_1)$ et $(\mathbb{R},d_2)$ sont complets ——— $(\mathbb{R},d_3)$ ——— :

La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $(\mathbb{R},d_1)$, donc pas non plus dans $(\mathbb{R},d_3)$, et pourtant elle est de Cauchy dans $(\mathbb{R},d_3)$:

$$\text{Si } n,m \geq 1,\ d_3(x_n,x_m) = |\arctan(n) - \arctan(m)| \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(m) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

<u>Moralité</u> Les notions d'ensembles bornés et de complétude dépendent de la métrique et pas seulement de la topologie que celle-ci définit (contrairement aux notions de cv, valeur d'adhérence ...)