Chapitre III

Topologie générale

1 Définitions générales

Définition (Topologie, espace topologique, ouverts, fermés, voisinages)**.** Soit E un ensemble. Une *topologie* sur E est une famille τ de parties de E (autrement dit : un sous-ensemble $\tau \subset \mathcal{P}(E)$) telle que

1. $\varnothing$ et E appartiennent à τ,
2. toute réunion d'éléments de τ appartient à τ,
3. toute intersection finie d'éléments de τ appartient à τ.

Un *espace topologique* est la donnée d'un couple (E, τ) formé d'un ensemble et d'une topologie sur cet ensemble. Les éléments de τ sont alors appelés *ouverts* de l'espace topologique (E, τ), et leurs complémentaires sont appelés *fermés* de (E, τ). Étant donné $x \in E$, on appelle *voisinage* de x (pour la topologie τ) tout sous-ensemble V de E qui contient un ouvert contenant x. On notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Remarque. le 1. est en fait superflu si l'on autorise les réunions et intersections de 0 éléments de τ (qui donnent $\varnothing$ et E respectivement).

Exemples.

1. Étant donné un espace métrique (E, d), on définit la *topologie associée à la distance* d comme la topologie τ_d dont les ouverts (i.e. les éléments) sont les ouverts *au sens métrique* de (E, d), comme nous les avons définis au chap. 2 :

$$\tau_d = \{A \subset E : \forall a \in A, \exists r > 0, B_d(a, r) \subset A\}$$

   (on a vu à cette occasion que τ_d formait bien une topologie).

   Un espace topologique (E, τ) est dit *métrisable* s'il existe une distance d sur E dont la topologie associée τ_d coïncide avec τ.

   Seuls ces espaces sont à notre programme, mais nous tenterons néanmoins de mettre en évidence leurs spécificités en introduisant, pour comparaison, quelques exemples d'espaces non métrisables (qui sont bien présents dans divers champs des mathématiques).

2. Exercice : Si (E, τ) est un espace topologique et si $A \subset E$,

$$\tau_A := \{U \cap A, U \in \tau\} \subset \mathcal{P}(A)$$

   est une topologie sur A, appelée *topologie induite*.

   Si A est un ouvert, les ouverts de τ_A sont les ouverts de τ inclus dans A.

   Si A est un fermé, les fermés de τ_A sont les fermés de τ inclus dans A.

   Si τ est associée à une distance d sur E, alors τ_A est associée à la *distance induite* d_A.

3. Pour un ensemble quelconque E, $\tau_{\text{discrète}} := \mathcal{P}(E)$ définit une topologie, appelée *topologie discrète* (on a vu que c'était la topologie associée à la distance discrète sur E). C'est la topologie sur E qui a le plus d'ouverts. À l'opposé, $\tau_{\text{grossière}} := \{\varnothing, E\}$ définit également une topologie sur E, appelée *topologie grossière*. C'est la topologie qui a le moins d'ouverts. Nous allons voir que (si E a au moins 2 éléments) il n'y a pas de "distance grossière" à laquelle cette topologie soit associée. On peut le montrer par les considérations suivantes.

Définition. On dit qu'un espace topologique est *séparé* (au sens de Hausdorff) si deux éléments distincts de E quelconques possèdent des voisinages disjoints.

Tout espace métrique est séparé (Exercice/rappel). Or si E a au moins deux éléments x et y, $(E, \tau_{\text{grossière}})$ n'est pas un espace séparé, puisque x et y ont pour seul voisinage E tout entier, et donc n'ont pas de voisinages qui soient disjoints l'un de l'autre.

Autre argument : dans un espace séparé, les singletons sont fermés (Exercice). Or dans $(E, \tau_{\text{grossière}})$, les seuls fermés sont $\varnothing$ et E, donc si E a au moins deux éléments, ses singletons ne sont pas fermés.

Retour aux exemples : en un peu moins "artificiel" que la topologie grossière, on peut aussi définir, sur tout ensemble E, la topologie *cofinie* (resp. *codénombrable*), dont les ouverts sont les parties de E dont le complémentaire est fini (resp. dénombrable), i.e. dont les fermés sont les parties finies (resp. dénombrables) de E. Exercice : si E est fini, la topologie cofinie sur E coïncide avec la topologie discrète, alors que si E est infini, cette topologie est non-séparée.

On verra d'autres exemples de topologies non séparées quand on parlera de topologie *quotient*.

Les exemples ci-dessus mènent naturellement à la définition suivante (attention au sens de l'inclusion !) :

Définition. Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur un même ensemble E. On dit que τ_2 est *plus fine que* τ_1 si $\tau_1 \subset \tau_2$.

Ainsi, sur un ensemble quelconque, $\tau_{\text{grossière}}$ est la topologie *la moins fine*, et $\tau_{\text{discrète}}$ est la topologie *la plus fine*.

Exercice : si d_1 et d_2 sont deux distances sur un ensemble E telles que $d_1 \leq d_2$, de τ_{d_1} et τ_{d_2}, laquelle est la plus fine ?

Définition. Soit (E, τ) un espace topologique. On dit qu'une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ *engendre* τ (ou *est une prébase de* τ) si τ est la topologie la moins fine (i.e. la plus petite !) contenant $\mathcal{F}$.

On dit que $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ est une *base* de τ si $\mathcal{B} \subset \tau$ et si tout ouvert de τ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exercice : Toute famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ engendre une (unique) topologie $\tau(\mathcal{F})$: la topologie dont les ouverts sont les réunions d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{F}$, qui a donc pour *base* l'ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ des intersections finies d'éléments de $\mathcal{F}$ (vérifier que c'est une topologie !). Elle est naturellement appelée *topologie engendrée par* $\mathcal{F}$.

En revanche, toute famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ n'est pas la *base* d'une topologie sur E. Il faut (et il suffit) pour cela que toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{B}$ soit réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exemple. 1. Si (E, d) est un espace métrique, la topologie τ_d associée a pour base l'ensemble des boules ouvertes (cf. chap. 2).

2. Exercice : Sur $E = \mathbb{R}$, la topologie usuelle a pour base la famille *dénombrable* :

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\, : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}.$$

On dit que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ est *à base dénombrable* (en anglais : *second-countable*). Généraliser ceci à tout EVN de dimension finie.

Définition. Soit (E, τ) un espace topologique et $x \in E$. On dit que $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ est une *base de voisinages de* x si tout $V \in \mathcal{B}$ est un voisinage de x et si tout voisinage de x contient un élément de $\mathcal{B}$.

Exemple. 1. Si (E, d) est un espace métrique (muni de la topologie τ_d associée), pour tout $x \in E$, l'ensemble des boules ouvertes centrées en x forme une base de voisinages de x, et l'ensemble de celles qui sont de rayon $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ aussi, qui a la propriété d'être en outre dénombrable.

2. Dans $(E, \tau_{\text{discrète}})$, pour tout $x \in E$, $\{\{x\}\}$ (le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ ayant pour seul élément $\{x\}$) est une base de voisinages de x.

Définition. Un espace topologique dont tout point possède une base dénombrable de voisinages est dit *à bases dénombrables de voisinages* (en anglais : *first-countable*).

C'est donc le cas des espaces métriques et des espaces discrets (ensembles munis de la topologie discrète). Mais il existe des espaces (non métrisables donc !) qui n'ont pas cette propriété, par exemple $(\mathbb{R}, \tau_{\text{cofinie}})$.

Notons qu'étant donnée une base dénombrable de voisinages $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'un point x, on peut toujours fabriquer une nouvelle base $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante* au sens où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} \subset W_n$, en posant $W_n = V_1 \cap \cdots \cap V_n$ (Exercice : vérifier que c'est encore une base).

Un espace topologique à base dénombrable d'ouverts est à bases dénombrables de voisinages (Exercice), mais la réciproque est fausse : notons ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées munies de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (y penser comme des fonctions bornées de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$). Cet espace possède une famille non-dénombrable d'ouverts disjoints (Exercice) : $\{B(u, 1), u \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}\}$. Or si $\mathcal{B}$ est une base de la topologie, $\mathcal{B}$ doit posséder un élément inclus dans chacune de ces boule, donc $\mathcal{B}$ est non-dénombrable.

On verra en revanche que, paradoxalement, $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est à base dénombrable d'ouverts (il pourrait sembler plus "gros", mais la continuité contraint beaucoup les choses, car justement elle ne permet pas de passer de la valeur 0 à la valeur 1 d'un coup, comme pour les suites).