Commentaires, compléments, oublis, errata...

(CM et Poly)

Chapitre 2

III Sous-variétés d'une variété

Proposition. *Une immersion injective propre (entre variétés) est un plongement.*

Démonstration. Soit $f : M \to N$ une telle immersion. Il s'agit de montrer que f induit un homéomorphisme sur son image, c'est-à-dire (vu qu'on sait déjà que f est continue et injective), que $f^{-1} : f(M) \to M$ est continue (en tout point de $f(M)$). Soit donc $y \in f(M)$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $f(M)$ convergeant vers y. L'ensemble $Y = \{y_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est compact (séparé comme sous-espace d'un espace séparé, et tout recouvrement de cet ensemble admet un sous-recouvrement fini du fait de la convergence de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Sa préimage par f, $X = \{x_n = f^{-1}(y_n), n \in \mathbb{N}\} \cup \{x = f^{-1}(y)\}$, est elle aussi compacte puisque f est propre. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc au moins une valeur d'adhérence $\ell \in X$, et en fait une seule car, par continuité de f, $f(\ell)$ doit être une valeur d'adhérence de $(f(x_n))_n = (y_n)_n$, donc $f(\ell) = y$, donc $\ell = f^{-1}(y) = x$. La suite $(x_n)_n = (f^{-1}(y_n))_n$ tend donc vers $f^{-1}(y)$. Par caractérisation séquentielle de la continuité (valable car on travaille dans un espace topologique métrisable), ceci montre que f^{-1} est continue en y, pour tout $y \in f(M)$. □

Remarque. L'argument ci-dessus permet en fait de montrer, beaucoup plus généralement, qu'une application continue injective et propre entre espaces métrisables induit un homéomorphisme sur son image.

IV Exemples et constructions

Somme connexe de deux variétés. Preuve des affirmations du CM, reformulées. Pour simplifier la rédaction, considérons M_1, M_2, K_1, K_2 plutôt que M, M', K, K'. Pour $i = 1, 2$, notons $M_i' = M_i \setminus K_i$, de sorte que $M_1 \# M_2 = M_1' \cup_\rho M_2'$. Rappelons que ρ est défini à partir des données suivantes : pour $i = 1, 2$, on a ψ_i difféomorphisme de $B(0, 2)$ vers un ouvert de M_i, $K_i = \psi(\bar{B}(0, \frac{1}{2}))$, $C = B(0, 2) \setminus \bar{B}(0, \frac{1}{2})$, ι l'involution $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ de C, on note $C_i = \psi_i(C) \subset M_i'$, et finalement $\rho = \psi_2 \circ \iota \circ \psi_1^{-1}$ définit un difféomorphisme de C_1 dans C_2.

Proposition. *$M_1 \# M_2$, définie comme ci-dessus, possède une unique structure de variété différentiable telle que p induise un difféomorphisme de M_1' vers $p(M_1')$ et de M_2' vers $p(M_2')$.*

(Notons que $p(M_1')$ et $p(M_2')$ sont des ouverts de $M_1 \# M_2$ d'après 2.35,2.).

Preuve. On sait déjà d'après 2.35,1. que p induit un homéomorphisme de M_1' vers l'ouvert $p(M_1')$ et de M_2' vers l'ouvert $p(M_2')$.

Base dénombrable. $M_1 \# M_2$ est réunion des ouverts $p(M_1')$ et $p(M_2')$ qui sont homéomorphes à des ouverts de variété donc à base dénombrable, donc $M_1 \# M_2$ est à base dénombrable.

Caractère séparé. Soient x et y deux points distincts de $M_1 \# M_2$. Il y a deux cas de figure :

- x et y appartiennent à un même $p(M_i')$, qui est séparé car homéomorphe à M_i', donc x et y possèdent des voisinages disjoints dans $p(M_i')$ et donc dans $M_1 \# M_2$ car $p(M_i')$ est un ouvert de $M_1 \# M_2$.
- (quitte à permuter les rôles) x appartient à $p(M_1') \setminus p(M_2')$ et y appartient à $p(M_2') \setminus p(M_1')$. En particulier, aucun des deux n'appartient à l'image par p des ouverts de recollement. Pour $i = 1$ et 2, notons $M_i'' = M_i \setminus \psi(\bar{B}(0, 1))$ (c'est M_i' privé d'un voisinage de son bord). Affirmation : $p(M_1'')$ et $p(M_2'')$ sont des ouverts *disjoints* de la somme connexe

qui contiennent x et y respectivement (faire un dessin !). (Il est déterminant ici que l'involution ρ qui permet de définir le recollement échange les côtés de la sphère de rayon 1).

Unicité si existence de la structure différentiable. Supposons qu'une telle structure existe. Alors pour toute carte (U, ϕ) de M_i', $(p(U), \phi \circ (p_{|U})^{-1})$ est une carte de $M_1 \# M_2$. En effet, ϕ est un difféomorphisme de U vers un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, p induit un difféomorphisme de $U \subset M_1'$ vers $p(U)$ par hypothèse, donc $(p_{|U})^{-1}$ définit un difféomorphisme de $p(U)$ vers U, et donc par composition, $\phi \circ (p_{|U})^{-1}$ est un difféomorphisme de $p(U)$ dans V, et on conclut par l'exercice 6 amélioré (ci-avant). Comme les $p(U)$ ainsi obtenus forment un recouvrement de $M_1 \# M_2$, l'atlas de $M_1 \# M_2$ dont on a supposé l'existence sera forcément l'atlas maximal contenant ces cartes, ce qui prouve l'unicité si existence.

Existence. Reste à prouver que les cartes décrites ci-dessus (i) forment effectivement un atlas (ii) pour lequel p induit un difféomorphisme de M_1' vers $p(M_1')$ et de M_2' vers $p(M_2')$.

Concernant le point (i), si (U, ϕ) est une carte de (l'atlas définissant la structure différentiable de) M_i', $(p(U), \phi \circ (p_{|U})^{-1})$ est une carte de $M_1 \# M_2$ (au sens topologique). En effet (en réécrivant une phrase du paragraphe précédent en remplaçant difféo par homéo), ϕ est un homéomorphisme de U vers un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, p induit un homéomorphisme de $U \subset M_1'$ vers $p(U)$ d'après la Proposition 2.35,1, donc $(p_{|U})^{-1}$ définit un homéomorphisme de $p(U)$ vers U, et donc par composition, $\phi \circ (p_{|U})^{-1}$ est un homéomorphisme de $p(U)$ dans l'ouvert V de $\mathbb{R}^n$.

Voyons maintenant la compatibilité. Soient (U, ϕ) une carte de M_i' et (U', ϕ') une carte de M_j' et notons $(V, \psi) = (p(U), \phi \circ (p_{|U})^{-1})$ et $(V', \psi') = (p(U'), \phi' \circ (p_{|U'})^{-1})$ les cartes de $M_1 \# M_2$ qu'elles induisent. Si $i \neq j$, quitte à inverser les rôles, on peut supposer que $i = 1$ et $j = 2$, et on a que $V \cap V' = p(U) \cap p(U')$ est inclus dans $p(M_1') \cap p(M_2') = p(C_1) = p(C_2)$, donc son image par $(p_{|U})^{-1})$ (resp. $(p_{|U'})^{-1})$) est incluse C_1 (resp. C_2). Dans le changement de carte

$$\psi' \circ \psi^{-1} = \phi' \circ (p_{|U'})^{-1} \circ p_{|U} \circ \phi^{-1},$$

ϕ^{-1} va donc d'un ouvert de $\phi(C_1)$ vers un ouvert de C_1, et $(p_{|U'})^{-1} \circ p_{|U}$ associe à un point de $U \cap C_1$ l'unique point de C_2 qui a la même image par p, donc cette application coïncide avec ρ. La composée ci-dessus est donc lisse, et de même pour son inverse.

Si maintenant $i = j$, U et U' sont tous les deux dans M_i' sur lequel p induit un homéomorphisme sur son image, donc $p(U) \cap p(U') = p(U \cap U')$, $\psi(V \cap V') = \phi(U \cap U')$, $\psi'(V \cap V') = \phi'(U \cap U')$ et $(p_{|U'})^{-1} \circ p_{|U} = \mathrm{Id}$ sur $U \cap U'$ donc le changement de carte $\psi' \circ \psi^{-1}$ coïncide avec $\phi' \circ \phi^{-1}$ et définit donc un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, ce qui conclut la preuve de la compatibilité.

Enfin, $M_1 \# M_2$ étant maintenant muni de l'atlas défini ci-dessus, pour le point (ii), il suffit d'observer que, pour toute carte (U, ϕ) de M_i, p lu dans les cartes (U, ϕ), $(p(U), \phi \circ (p_{|U})^{-1})$ n'est autre que l'identité, donc p est un difféomorphisme local. Comme il induit en outre un homéomorphisme de M_i' sur son image, cet homéomorphisme est en fait un difféomorphisme global. □

Chapitre 3

I Espace tangent en un point

II Fibrés vectoriels

Le cas de l'hélicoïde. On pose

$$\mathcal{H} = \{(\theta, t\cos\theta, t\sin\theta), (\theta, t) \in \mathbb{R}^2\} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} D_\theta$$

où D_θ est la droite $q_\theta + \mathbb{R}\vec{v}_\theta$ avec $q_\theta = (\theta, 0, 0)$ et $\vec{v}_\theta = (0, \cos\theta, \sin\theta)$.

$\mathcal{H}$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$. L'application $\psi : (\theta, t) \mapsto (\theta, t\cos\theta, t\sin\theta)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ est un plongement. En effet,

— elle est lisse,

— sa jacobienne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t\sin\theta & \cos\theta \\ t\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

en tout point $(\theta, t) \in \mathbb{R}^2$ est de rang 2 (les vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires) donc c'est une immersion,

— elle est injective : si $\psi(\theta, t) = \psi(\theta', t')$, $\theta = \theta'$ et $t(\cos\theta, \sin\theta) = t'(\cos\theta', \sin\theta') = t'(\cos\theta, \sin\theta)$ donc $t = t'$,

— elle est propre : si K est un compact de $\mathbb{R}^3$ (i.e. fermé borné, disons inclus dans $B(0, R)$), $\psi^{-1}(K)$ est fermé par continuité et

$$(\theta, t) \in \psi^{-1}(K) \;\Rightarrow\; \|\psi(\theta, t)\| < R \;\Leftrightarrow\; \theta^2 + t^2 < R^2$$

donc $\psi^{-1}(K)$ est borné.

Comme $\mathcal{H} = \psi(\mathbb{R}^2)$, cela fait de $\mathcal{H}$ une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$, munie donc d'une structure de variété différentiable, et ψ induit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathcal{H}$, que nous noterons encore ψ.

Structure de fibré vectoriel. Notons p la restriction à $\mathcal{H}$ de la projection $(x, y, z) \mapsto x$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R} =: B$. Elle est lisse comme restriction à une sous-variété d'une application lisse, surjective, et satisfait $p(\psi(\theta, t)) = \theta$. Ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{R} = B$, la fibre $p^{-1}(\{\theta\})$ est la droite affine D_θ, qui est naturellement munie d'une structure d'espace vectoriel de dimension 1 par l'identification $q_\theta + \mathbb{R}\,\vec{v}_\theta \simeq \mathbb{R}$.

Vérifions que $\phi = \psi^{-1} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^2 = B \times \mathbb{R}$ fournit une trivialisation *globale*. Si $p_1 : B \times \mathbb{R} \to B$ désigne la projection sur le premier facteur $(\theta, t) \mapsto \theta$, l'égalité souhaitée $p_1 \circ \phi = p$ correspond précisément à l'égalité $\theta = p(\psi(\theta, t))$ évoquée précédemment. Enfin, en restriction à la fibre au-dessus de θ, ϕ envoie $q_\theta + \mathbb{R}\,\vec{v}_\theta$ sur $\{\theta\} \times \mathbb{R}$ via l'identité sur $\mathbb{R}$, qui est linéaire.

$\mathcal{H}$ est donc l'espace total d'un fibré vectoriel de rang 1 (ou fibré en droite) au-dessus de $\mathbb{R}$. (attention, ici la fibre et la base sont identiques, c'est très rarement le cas.)

Liste de preuves laissées en exercice (à compléter)

Propositions 2.31, 2.32, 2.35, Théorème 2.43 (i)...